TROISIÈME MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable ;

Par J. LIOUVILLE (*).

(Présenté à l'Académie des Sciences. — Août 1837.)

I.

1. Dans ce troisième mémoire, comme dans les deux précédents, je considère les fonctions V qui satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0,$$

et aux conditions définies

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour } x = \mathrm{x},$$

$$(3) \qquad \frac{dV}{dx} + HV = 0 \quad \text{pour } x = X :$$

x est une variable réelle qui peut croître depuis x jusqu'à X : h, H sont deux coefficients positifs, et g, k, l trois fonctions positives de x. Pour que les équations (1), (2), (3) aient lieu en même temps, il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines (réelles et positives) r_1, r_2, r_3,.... d'une certaine équation transcendante

(*) *Voyez* le tome Ier de ce Journal, page 253 et le tome II, page 16.

$\varpi(r) = 0$. Cela posé, on veut démontrer la convergence et trouver la somme de la série

$$(4) \qquad \Sigma \left\{ \frac{V \int_{\text{x}}^{\text{X}} gVf(x)dx}{\int_{\text{x}}^{\text{X}} gV^2dx} \right\},$$

dans laquelle le signe Σ s'applique aux valeurs de r dont il vient d'être question et où $f(x)$ représente une fonction réelle (*) de x. Cette fonction $f(x)$ est arbitraire : elle peut changer de forme ou d'expression analytique dans l'étendue des valeurs de la variable; mais nous supposerons en général que pour chaque valeur déterminée de x elle prend une valeur unique et déterminée, et que, de plus, elle croît infiniment peu lorsque la variable x elle-même subit un accroissement infiniment petit. J'ai démontré le premier la convergence de la série (4), dans un mémoire imprimé à la page 16 de ce volume; mais l'analyse dont j'ai fait usage alors, quoique simple et élégante, n'est pas encore assez générale. En effet, elle exige que les dérivées premières et secondes des fonctions g, k, $f(x)$ ne deviennent jamais infinies lorsque x croît de x à X, et que, de plus, $f(x)$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 & \text{pour } x = \text{x}, \\ \dfrac{df(x)}{dx} + \text{H}f(x) = 0 & \text{pour } x = \text{X}. \end{cases}$$

Je me propose ici de faire disparaître, autant qu'il me sera possible, ces restrictions diverses, et surtout celles relatives à la fonction $f(x)$. Il me suffira, pour cela, de modifier un peu la méthode dont je me suis servi précédemment, ce qui, je dois l'avouer, en altérera l'élégance. Mais la démonstration nouvelle qui résultera de ce changement sera aussi rigoureuse que l'ancienne et beaucoup plus complète. En l'exposant j'admettrai, pour plus de simplicité, que des deux nombres h, H aucun n'est infini.

(*) Si la fonction $f(x)$ était imaginaire et de la forme $f_1(x) + \sqrt{-1}\,f_2(x)$, on décomposait la série (4) en deux autres séries semblables, relatives aux deux autres fonctions réelles $f_1(x)$, $f_2(x)$.

2. Il faut d'abord, comme dans mon second mémoire, changer de variable indépendante et remplacer la fonction V par une autre fonction U. Posons

$$z=\int_{\mathrm{x}}^{x}\sqrt{\frac{g}{k}}.dx,\quad \theta=\frac{1}{\sqrt[4]{gk}},\quad V=\theta U,\quad r=\rho^2:$$

l'équation (1) deviendra

$$\frac{d^2U}{dz^2}+\rho^2U=\lambda U, \tag{6}$$

λ représentant la quantité

$$\frac{1}{\theta\sqrt{gk}}\left(l\sqrt{\frac{k}{g}}.\theta-\frac{d\sqrt{gk}}{dz}.\frac{d\theta}{dz}-\sqrt{gk}.\frac{d^2\theta}{dz^2}\right).$$

Quant aux équations (3), (4), si on leur applique les mêmes transformations, elles prendront la forme

$$\frac{dU}{dz}-h'U=0\quad\text{pour } z=0, \tag{7}$$

$$\frac{dU}{dz}+H'U=0\quad\text{pour } z=Z, \tag{8}$$

Z étant la valeur de z qui répond à $x=X$: h', H' désignent deux constantes différentes de h, H, et qui ne sont pas assujéties, comme ces dernières, à la condition d'être positives.

On aura en même temps, par un calcul très simple,

$$\int_{\mathrm{x}}^{X}gV^2dx=\int_0^Z U^2dz.$$

En faisant

$$f(x)\sqrt[4]{gk}=\mathrm{f}(z),$$

on aura aussi

$$\int_{\mathrm{x}}^{X}gVf(x)dx=\int_0^Z U\mathrm{f}(z)\,dz.$$

Représentons par θT le terme général de la série (4) : cette série sera exprimée par $\theta\Sigma T$, et la valeur de T pourra se mettre sous la forme

$$(9) \qquad T = \frac{U\int_0^Z U f(z)\,dz}{\int_0^Z U^2 dz},$$

que nous lui attribuerons désormais exclusivement. Nous considérerons, dans les numéros qui suivent, les termes de la série ΣT qui répondent à des valeurs de ρ très grandes, et nous démontrerons la convergence de cette série, quelle que soit la fonction $f(x)$. Pour l'exactitude de nos raisonnements, il suffira que la valeur absolue $\sqrt{\lambda^2}$ de la fonction λ soit tellement composée en z que l'intégrale $\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz$ ait une valeur finie et puisse être regardée comme équivalente à la somme de ses éléments. Cette condition est remplie, dans certains cas, même par une fonction λ qui devient infinie pour une ou plusieurs valeurs de z comprises entre o et Z. Quand la convergence de la série (4) aura été ainsi démontrée, on pourra conclure de la méthode développée dans mon premier mémoire, que la somme de cette série est $f(x)$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$. Pour l'exactitude de l'équation $f(x) = \theta\Sigma T$, il n'est pas du tout nécessaire que la fonction $f(x)$ satisfasse aux conditions (5) : ces conditions, que j'ai imposées mal à propos à la fonction $f(x)$ dans mes deux premiers mémoires, sont inutiles et doivent être absolument mises de côté.

II.

3. Désignons, comme dans mon second mémoire, par λ', U', ce que deviennent λ et U lorsqu'on y remplace z par z' : nous tirerons de l'équation (6) l'équation nouvelle

$$(10) \quad U = \cos\rho z + \frac{h'\sin\rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda' U' \sin\rho(z - z')\,dz',$$

qui a été donnée déjà à la page 24 de ce volume. Cette valeur de U satisfait à la fois à l'équation indéfinie (6) et à la condition définie (7) : elle suppose que l'on ait pris pour unité la valeur arbitraire de U relative à $z = 0$. On peut s'en servir pour trouver une limite supérieure de la plus grande valeur abolue que U puisse prendre lorsque z croît de 0 à Z. Soit en effet Q cette valeur *maxima*. Si la quantité $\sqrt{\lambda^2}$ est telle que l'intégrale $\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz$ puisse être regardée comme équivalente à la somme de ses éléments, il en sera de même *à fortiori* de l'intégrale

$$\int_0^z \lambda' U' \sin \rho(z - z') dz' :$$

la valeur de cette dernière intégrale augmentera donc en remplaçant λ' par $\sqrt{\lambda'^2}$, U' par Q, $\sin \rho(z - z')$ par l'unité et z par Z : d'un autre côté, le maximum de $\cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho}$ est $\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}$: donc le second membre de l'équation (10) est constamment plus petit que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{Q}{\rho}\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz,$$

et comme, d'un autre côté, il peut devenir égal à Q, cela exige que l'on ait

$$Q < \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{Q}{\rho}\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz.$$

Ainsi, pour des valeurs de ρ supérieures à $\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz$, il vient

$$Q < \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}}{1 - \frac{1}{\rho}\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz}.$$

On peut donc trouver une limite indépendante de ρ au-dessous de laquelle Q et U tomberont toujours, pour des valeurs de ρ de plus en plus grandes : afin de mieux préciser cette limite, nous dirons que l'on a par exemple $U < 2$ lorsque le paramètre ρ est suffisamment grand. Ce théorème a été démontré, mais d'une manière moins générale, dans mon second mémoire.

III.

4. En différenciant l'équation (10) par rapport à z, on obtient

la valeur de $\frac{dU}{dz}$: il est aisé d'en déduire ensuite celle de $\frac{dU}{dz} + H'U$ relative $z = Z$, et par conséquent de former, d'après la condition (8), l'équation dont les valeurs de ρ dépendent. En posant, comme dans le mémoire déjà cité,

$$P = h' + H' + \int_0^Z \lambda' U' \left(\cos \rho z' - \frac{H' \sin \rho z'}{\rho}\right) dz',$$
$$P' = \frac{H'h'}{\rho} + \int_0^Z \lambda' U' \left(\frac{H' \cos \rho z'}{\rho} + \sin \rho z'\right) dz',$$

cette équation sera

$$(11) \qquad \operatorname{tang} \rho Z = \frac{P}{\rho - P'}.$$

D'après la composition des fonctions P et P′, on voit que pour de grandes valeurs de ρ elles ne peuvent jamais dépasser un certain maximum absolu indépendant de ce paramètre et facile à calculer : en se rappelant que l'on a $U < 2$, on trouve en effet

$$P < \sqrt{(h' + H')^2} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{H'}{\rho}\right)^2} \cdot \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$
$$P' < \sqrt{\frac{H'^2 h'^2}{\rho^2}} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{H'}{\rho}\right)^2} \cdot \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$

d'où résulte

$$P < \sqrt{(h' + H')^2} + 2\sqrt{2} \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$
$$P' < 1 + 2\sqrt{2} \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$

dès que le paramètre ρ a une valeur numérique supérieure à celle des deux quantités H', $H'h'$: il est inutile d'avertir que dans ces inégalités les radicaux sont tous pris positivement.

On trouvera de même une limite indépendante de ρ pour les deux dérivées $\frac{dP}{d\rho}$, $\frac{dP'}{d\rho}$. On peut conclure de là que pour des valeurs de ρ très grandes, le second membre de l'équation (11) et sa dérivée prise par rapport à deviennent de très petits nombres.

5 Maintenant mettons l'équation (11) sous la forme

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tang} \rho Z - \frac{P}{\varrho - P'} = 0.$$

Désignons par n un nombre entier très grand et substituons au lieu de ρ les deux quantités

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{1}{Z}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

dans la fonction

$$\operatorname{tang} \rho Z - \frac{P}{\varrho - P'}:$$

par ces substitutions, le terme tang ρZ deviendra successivement -1, $+1$: le second terme au contraire sera très petit. Donc, la fonction dont il s'agit (fonction qui reste évidemment continue entre les limites citées) passera du négatif au positif, d'où l'on doit conclure que entre les limites

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{1}{Z}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right),$$

il existe une racine de l'équation (12) ou de l'équation (11). Je dis de plus qu'il n'y en a qu'une; car, dans le cas contraire, il faudrait que la dérivée prise par rapport à ρ de la fonction

$$\operatorname{tang} \rho Z - \frac{P}{\varrho - P'}$$

pût devenir égale à zéro entre ces limites, ce qui n'est pas, puisque lorsque ρZ varie depuis $n\pi - \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $n\pi + \frac{\pi}{4}$, la dérivée de tang ρZ est toujours $> Z$, tandis que celle de $\frac{P}{\varrho - P'}$ est très petite.

Il y a de même une seule racine entre

$$\frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right],$$

entre

$$\frac{1}{Z}\left[(n+2)\pi - \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+2)\pi + \frac{\pi}{4}\right], \text{ etc.}$$

Mais il n'en existe aucune entre

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}\right],$$

entre

$$\frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+2) - \frac{\pi}{4}\right], \text{ etc.},$$

comme on peut s'en assurer en observant que, pour les valeurs de ρ comprises dans chacun de ces intervalles, on a $\tang^2 \rho Z > 1$.

6. La racine ρ comprise entre

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

s'obtient du reste sans difficulté puisque l'équation (11) résolue donne

$$\rho Z = n\pi + \text{arc tang}\, \frac{P}{\rho - P'} :$$

en remplaçant $\text{arc tang}\, \frac{P}{\rho - P'}$ par $\frac{P}{\rho - P'}$ ou par $\frac{P}{\rho}$, et ensuite ρ par $\frac{n\pi}{Z}$ dans la fraction $\frac{P}{\rho}$, on aura une expression de ρ très approchée. On voit par là que la valeur de ρ est de la forme

$$(13) \qquad \rho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n},$$

B_n étant une fonction de n dont la valeur absolue restera toujours inférieure à une certaine limite, indépendante de n, que l'on pourrait assigner.

7. Les racines qui viennent après celles-là par ordre de grandeur s'en déduiront en augmentant successivement le nombre n d'une unité. En les élevant au carré, on obtiendra les valeurs correspondantes du paramètre r : on pourrait même démontrer que la $(n+1)^{ième}$

des racines r_1, r_2, etc., est précisément exprimée par

$$\left(\frac{n\pi}{Z}+\frac{B_n}{n}\right)^2:$$

c'est ce que j'ai fait voir à la page 30 de ce volume et ce sur quoi il est inutile d'insister ici. Il suffit d'observer que la partie principale des racines ρ fournies par la formule

$$\rho=\frac{n\pi}{Z}+\frac{B_n}{n}$$

croît proportionnellement au nombre n.

Dans la suite de ce mémoire, nous désignerons par la caractéristique Ψ (et aussi par Ψ', Ψ'', Ψ''',...) toute fonction de n qui ne dépassera jamais un certain *maximum* absolu N : $\frac{\rho}{n}$ sera par exemple une de ces fonctions, d'où il est aisé de conclure que les séries ayant pour terme général $\frac{\Psi}{n\rho}$ ou $\frac{\Psi}{\rho^2}$ sont convergentes, puisqu'en remplaçant ρ par $n\left(\frac{\rho}{n}\right)$ elle se ramènent à la forme $\Sigma\left\{\frac{\Psi'}{n^2}\right\}$.

IV.

8. Considérons les deux intégrales

$$(14)\qquad \int_0^z f(z)\sin\rho z dz,\quad \int_0^z f(z)\cos\rho z dz,$$

f(z) désignant la fonction de z qui se trouve au numérateur de la fraction (9) ou plus généralement une fonction déterminée de z qui ne devienne jamais infinie. Je dis que ces deux intégrales, considérées comme fonctions de ρ, sont de la forme $\frac{\Psi}{\rho}$. Pour établir ce théorème très utile et, je crois, déjà connu, il suffira de montrer que la valeur de chacune d'elles est inférieure à

$$\frac{2(p+q+1).f_1}{\rho},$$

f_1 étant le maximum absolu de f(z), p le nombre de fois où la fonction f(z) change de signe entre les limites o, z, et q le nombre de fois où (sans changer de signe) elle cesse d'être croissante ou constante pour devenir décroissante, ou bien cesse au contraire d'être décroissante ou constante pour devenir croissante.

Or, soient z', z'',..., $z^{(p+q)}$ les valeurs pour lesquelles s'effectue ainsi un changement dans l'état de la fonction, en sorte que de l'une de ces valeurs à la suivante cette fonction ait un signe invariable et soit toujours croissante ou toujours décroissante, ces derniers mots n'excluant pas toutefois les cas où elle resterait constante. Chacune des intégrales (14) se partagera en $(p+q+1)$ autres intégrales prises, la première entre les limites o, z', la seconde entre les limites z', z'',..., la dernière entre les limites $z^{(p+q)}$ et z. Désignons par a une quelconque des quantités o, z', z''... et par b celle qui la suit immédiatement dans l'ordre des indices. Si je prouve que la valeur numérique de chaque intégrale partielle

$$\mathrm{M} = \int_a^b \mathrm{f}(z)\sin\rho z dz\,, \qquad \mathrm{M}' = \int_a^b \mathrm{f}(z)\cos\rho z dz$$

est inférieure à $\frac{2\mathrm{f}_1}{\rho}$, il sera prouvé *à fortiori* que les intégrales (14) sont toutes deux plus petites que $\frac{2(p+q+1).\mathrm{f}_1}{\rho}$, conformément au théorème énoncé.

Soit m' le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{\rho a}{\pi}$, et $(m+m')$ le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\rho b}{\pi}$. Depuis $z = a$ jusqu'à $z = \frac{m'\pi}{\rho}$, $\mathrm{f}(z)\sin\rho z dz$ conservera toujours le même signe : pour fixer les idées, admettons que ce soit le signe $+$: entre les limites $z = \frac{m'\pi}{\rho}$, $z = \frac{(m'+1)\pi}{\rho}$, il est clair que la valeur de $\mathrm{f}(z)\sin\rho z dz$ sera au contraire négative, puis elle redeviendra positive depuis $z = \frac{(m'+1)\pi}{\rho}$ jusqu'à $z = \frac{(m'+2)\pi}{\rho}$ et ainsi de suite. Partageons l'intégrale M en un certain nombre d'autres intégrales prises, la première depuis $z = a$ jusqu'à $z = \frac{m'\pi}{\rho}$, la seconde depuis $z = \frac{m'\pi}{\rho}$ jusqu'à $z = \frac{(m'+1)\pi}{\rho}$,..., la dernière depuis $z = \frac{(m+m')\pi}{\rho}$ jusqu'à $z = b$. Ces diverses intégrales, dont nous désignerons par $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m, D_{m+1}, D$, les valeurs absolues seront alternativement positives et négatives. De plus, si la valeur absolue de $f(z)$ est décroissante, il est aisé de voir qu'on aura

$$D_1 > D_2 \ldots > D_m > D_{m+1} > D,$$

tandis qu'il viendra au contraire

$$D_{m+1} > D_m \ldots > D_2 > D_1 > D_0,$$

si la valeur absolue de $f(z)$ est croissante. Dans le premier cas, l'intégrale M sera comprise entre D_0 et $D_0 - D_1$ et par conséquent sa valeur numérique sera inférieure au plus grand des deux nombres D_0, D_1 : dans le second cas, cette valeur numérique sera inférieure au plus grand des deux nombres D, D_{m+1}. Or, toutes les quantités D_0, D_1 .., D_{m+1}, D grandissent lorsqu'on remplace $f(z)$ par son maximum f_1 : de plus D_0 et D peuvent grandir encore si, après ce changement, on remplace a par $\frac{(m'-1)\pi}{\rho}$ et b par $\frac{(m+m'+1)\pi}{\rho}$. Or, quand on a effectué ces diverses opérations, ces intégrales deviennent toutes égales entre elles et à $\frac{2f_1}{\rho}$: donc à *fortiori* la valeur numérique de M est $< \frac{2f_1}{\rho}$. Une démonstration semblable s'appliquera à l'intégrale M'.

V.

9. Il est aisé de trouver à quelle forme on peut réduire l'intégrale $\int_0^z Uf(z)dz$. Puisque l'on a

$$U = \cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda' U' \sin \rho\,(z - z')\,dz',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$U = \cos \rho z - \frac{\cos \rho z}{\rho}\int_0^z \lambda U \sin \rho z dz$$
$$+ \frac{\sin \rho z}{\rho}\left(h' + \int_0^z \lambda U \cos \rho z dz\right),$$

l'intégrale en question est composée de trois parties distinctes : la première, savoir $\int_0^z f(z)\cos\rho z dz$, est de la forme $\frac{\Psi}{\rho}$, d'après ce qu'on vient de démontrer. Je vais montrer que les autres sont de la forme $\frac{\Psi'}{\rho^2}$. En effet l'intégrale double

$$\int_0^z f(z)\cos\rho z dz \int_0^z \lambda U \sin\rho z dz,$$

à l'aide d'une intégration par parties et en posant

$$\int_0^z f(z)\cos\rho z dz = \frac{\Psi}{\rho},$$

devient

$$\frac{\Psi}{\rho}\int_0^z \lambda U \sin\rho z dz - \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda U\Psi \sin\rho z dz:$$

par suite elle prend la forme $\frac{\Psi'}{\rho^2}$ lorsqu'on la multiplie par $-\frac{1}{\rho}$. De même l'intégrale

$$\int_0^z f(z)\sin\rho z dz \left(h' + \int_0^z \lambda U \cos\rho z dz\right),$$

à l'aide d'une intégration par parties et en posant

$$\int_0^z f(z)\sin\rho z dz = \frac{\Psi}{\rho};$$

devient

$$\frac{\Psi}{\rho}\left(h' + \int_0^z \lambda U \cos\rho z dz\right) - \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda U\Psi \cos\rho z dz.$$

par suite elle prend la forme $\frac{\Psi'}{\rho^2}$ lorsqu'on la multiplie par $\frac{1}{\rho}$.

10. La propriété de l'intégrale $\int_0^z f(z)Udz$ que nous venons de démontrer subsiste encore lorsque sa limite supérieure devient égale à Z. On en conclut que le numérateur du terme général T de la série ΣT est de la forme

$$\frac{\Psi}{\rho} + \frac{\Psi'}{\rho^2},$$

la valeur de $\frac{\Psi}{\rho}$ étant précisément

$$\cos \rho z \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz :$$

quant au dénominateur $\int_0^Z U^2 dz$, il est égal à

$$\int_0^Z \cos^2 \rho z dz + \frac{2}{\rho} \int_0^Z \cos \rho z \,.\, R dz + \frac{1}{\rho^2} \int_0^Z R^2 dz,$$

R représentant la quantité

$$h' \sin \rho z + \int_0^z \lambda' U' \sin \rho (z - z') \, dz'.$$

Or,

$$\int_0^Z \cos^2 \rho z dz = \frac{Z}{2} + \frac{\sin 2\rho Z}{4\rho} :$$

on voit donc qu'abstraction faite des termes divisés par ρ la valeur de $\int_0^Z U^2 dz$ se réduit à $\frac{Z}{2}$. D'après cela on peut écrire

$$\int_0^Z U^2 dz = \frac{Z}{2}\left(1 + \frac{\psi''}{\rho}\right),$$

ce qui donne

$$T = \left(\frac{\psi}{\rho} + \frac{\psi'}{\rho^2}\right) \cdot \frac{2}{Z\left(1 + \frac{\psi''}{\rho}\right)}.$$

Mais cette valeur de T peut elle-même se mettre sous la forme

$$T = \frac{2\psi}{\rho Z} + \frac{\psi'''}{\rho^2},$$

et la série $\Sigma \frac{\psi'''}{\rho^2}$ est convergente. Donc, pour prouver la convergence de la série ΣT, il suffit d'établir celle de la série plus simple

$$\Sigma \frac{\psi}{\rho} \quad \text{ou} \quad \Sigma \cos \rho z \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz$$

que nous désignerons par ΣY.

11. La formule

$$\rho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n}$$

donne

$$\cos \rho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} \cos \frac{zB_n}{n} - \sin \frac{n\pi z}{Z} \sin \frac{zB_n}{n}.$$

On a $\sin \frac{zB_n}{n} = 0$ aux quantités près de la forme $\frac{\psi}{n}$ ou $\frac{\psi}{\rho}$ et $\cos \frac{zB_n}{n} = 1$ aux quantités près de la forme $\frac{\psi}{\rho^2}$. Il est donc permis de poser

$$\cos \rho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{\psi'}{\rho}$$

et l'on pourrait écrire aussi

$$\cos \rho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} - \frac{zB_n}{n} \sin \rho z + \frac{\psi''}{\rho^2}.$$

On a donc d'abord

$$Y = \left(\cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{\psi'}{\rho}\right)\int_0^Z f(z) \cos \rho z dz\,,$$

valeur qu'il est aisé de réduire à la forme

$$Y = \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz + \frac{\psi'''}{\rho^2}\,,$$

en se rappelant que l'intégrale $\int_0^Z f(z) \cos \rho z dz$ est de la forme $\frac{\psi}{\rho}$. En remplaçant $\cos \rho z$ par $\cos \frac{n\pi z}{Z} - \frac{zB_n}{n} \sin \rho z + \frac{\psi''}{\rho^2}$, et observant que l'intégrale $\int_0^Z z f(z) \sin \rho z dz$ est aussi de la forme $\frac{\psi}{\rho}$, on a ensuite

$$Y = \cos \frac{\pi n z}{Z} \int_0^Z f(z) \cos \frac{n\pi z}{Z} dz + \frac{\psi^{\text{IV}}}{\rho^2}.$$

Or la série $\Sigma \frac{\psi^{\text{IV}}}{\rho^2}$ est convergente, et il en est de même de la série périodique

$$\Sigma \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^Z f(z) \cos \frac{n\pi z}{Z} dz$$

dont les géomètres se sont beaucoup occupés (*). Donc la convergence de la série ΣY (et par conséquent de la série ΣT) est incontestable.

VI.

11. Nous avons dit que nous regardions en général la fonction $f(x)$ comme assujétie à prendre un accroissement infiniment petit lorsque x croît infiniment peu : cependant la démonstration précédente de la convergence de la série ΣT est indépendante de cette restriction : elle ne cesserait pas d'être exacte si, pour une ou plusieurs valeurs de x, la fonction $f(x)$ (qui ne devient jamais infinie) passait tout-à-coup d'une valeur A à une autre valeur très différente B. Mais pour prouver que la somme $F(x)$ de la série (4) est égale à $f(x)$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, il faut exclure le cas où les valeurs de $f(x)$ peuvent varier brusquement, ou du moins, si ce cas a lieu, il ne faut pas étendre l'équation $F(x) = f(x)$ aux abscisses x pour lesquelles l'ordonnée de la courbe représentée par l'équation $y = f(x)$ devient ainsi discontinue. Bornons-nous donc aux fonctions $f(x)$ jouissant des propriétés indiquées n° 1. Alors, comme nous l'avons déjà dit, l'équation $F(x) = f(x)$ se démontrera par la méthode indiquée dans mon premier Mémoire et subsistera même aux limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$. Toutefois cela suppose que des deux nombres h, H, aucun ne soit infini. Si l'on a par exemple $h = \infty$ l'équation (2) deviendra

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x};$$

on aura donc aussi dans ce cas

$$F(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x};$$

et l'équation $F(x) = f(x)$ ne pourra subsister à la limite $x = \mathrm{x}$ que si la fonction $f(x)$ vérifie la condition $f(\mathrm{x}) = 0$. De même si $H = \infty$, l'équation $F(x) = f(x)$ ne pourra subsister à la limite $x = \mathrm{X}$ que si

(*) Pour tout ce qui regarde la convergence des séries périodiques, *voyez* les ouvrages de M. Cauchy et surtout l'excellent Mémoire de M. Lejeune Dirichlet (*Journal de M. Crelle*, tome IV, 2e cahier).

l'on a $f(X) = 0$. Au reste ces cas d'exception sont indiqués par notre démonstration même. En effet pour que l'intégrale

$$\int_{x}^{X} g[F(x) - f(x)] V_m(x) dx,$$

dont on fait usage à la page 263 de tome I[er] de ce journal, soit égale à zéro quel que soit l'indice m, il est nécessaire que l'on ait en général $F(x) = f(x)$; mais cette nécessité disparaît pour les valeurs de x qui donnent $V_m(x) = 0$ quel que soit m, puisque, pour ces valeurs, l'élément $g[F(x) - f(x)] V_m(x) dx$ est nul de lui-même indépendamment du facteur $F(x) - f(x)$.

VII.

12. En terminant ce troisième Mémoire, je ne puis m'empêcher de faire observer combien est directe et générale la méthode dont je me suis servi pour sommer la série (4). Cette méthode s'applique non-seulement aux fonctions V définies par une équation différentielle du second ordre, mais encore à une foule de fonctions données par des équations différentielles d'ordre supérieur. C'est ce que l'on peut voir par l'exemple simple que j'ai développé dans mon mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$ (*).

Au reste, voici quelques théorèmes que je me contenterai d'énoncer et dont le lecteur trouvera aisément la démonstration. Ils serviront à bien montrer la généralité de mes principes quoi qu'ils soient fort loin d'embrasser tous les cas où ces principes sont applicables. Dans tout ce qui va suivre, x désignera une variable réelle comprise entre x et X : $f(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, $V_1, V_2 \ldots, V_n \ldots, U_1, U_2 \ldots, U_n \ldots,$ seront des fonctions de x. Pour éviter tout embarras, je supposerai que ces fonctions ont, pour chaque valeur de x, une valeur réelle unique et déterminée, et qu'elles croissent infiniment peu lorsque x éprouve un accroissement infiniment petit : toutefois cette condition de continuité ne sera pas toujours indispensable. Cela posé,

(*) Voyez le dernier cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

1°. Si les fonctions V_1, $V_2, \ldots$, U_1. $U_2, \ldots$ sont telles que, pour deux indices m et n différents, on ait toujours

$$\int_x^X V_m U_n dx = 0$$

et si la série

$$\Sigma \left\{ \frac{V_n \int_x^X U_n f(x)\, dx}{\int_x^X U_n V_n\, dx} \right\}$$

est convergente, la somme $F(x)$ de cette série devra satisfaire à la condition

$$\int_x^X U_n [F(x) - f(x)] dx = 0,$$

l'indice n étant quelconque.

2°. Si donc on désigne par A_1, $A_2, \ldots$ des quantités choisies arbitrairement, mais indépendantes de x, et si l'on pose

$$P = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \text{etc.}$$

on aura aussi

$$\int_x^X P [F(x) - f(x)]\, dx = 0.$$

3°. Si par une détermination convenable des quantités A_1, $A_2, \ldots$, on peut faire en sorte que P change de signe pour des valeurs quelconques de x, données d'avance et ne change de signe que pour celles-là, on aura $F(x) = f(x)$.

4°. Toutefois si les fonctions U_1, U_2, etc., s'évanouissent toutes pour une même valeur de x telle que $x = \alpha$, il pourra arriver que l'équation $F(x) = f(x)$ cesse d'avoir lieu pour $x = \alpha$. Dans le cas où l'équation $F(\alpha) = f(\alpha)$ sera ainsi inexacte, la dérivée $F'(\alpha)$ sera nécessairement infinie.

5°. Si la fonction P jouit de la propriété énoncée (3°.) et si l'équation

$$\int_x^X \varphi(x)\, U_n dx = 0$$

a lieu quel que soit l'indice n, on aura nécessairement $\varphi(x) = 0$.

6°. La propriété énoncée (3°.) appartient à la fonction P quand la fonction U_n est constamment égale à un polynome entier de degré $(n-1)$.

7°. Elle a lieu encore dans une foule d'autres cas, et spécialement quand l'équation

$$A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_nU_n = 0$$

a tout au plus $(in-1)$ racines tant égales qu'inégales, quel que soit l'indice n et quels que soient les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

8°. Si la condition précédente est remplie et si l'équation

$$\int_x^X \varphi(x) U_n dx = 0$$

a lieu pour toutes les valeurs de n comprises dans la série $1, 2, \ldots, m$, la fonction $\varphi(x)$ changera de signe au moins m fois entre les limites $x = x$, $x = X$

9°. Soit $\varpi(r) = 0$ une équation transcendante, et $r_1, r_2, r_3, \ldots$ des racines de cette équation. Admettons que la fonction $\Phi(x, r)$ ne devienne identiquement nulle pour aucune des racines r de $\varpi(r) = 0$, tant que x reste indéterminée. Si l'équation

$$\int_x^X \Phi(x, r) U_n dx = 0,$$

dans laquelle l'indice n est quelconque, a lieu pour la fonction particulière Φ toutes les fois que la racine r est différente de r_1, r_2, etc., et si de plus la fonction P jouit de la propriété énoncée (3°.), je dis que la racine réelle ou imaginaire dont il s'agit n'existera pas, c'est-à-dire que l'équation $\varpi(r) = 0$ ne pourra avoir aucune racine, réelle ou imaginaire, différente de r_1, r_2, etc.

13. Il serait aisé, je le répète, de généraliser encore beaucoup ces théorèmes. Mais nos énoncés deviendraient alors trop vagues. C'est dans les considérations exposées ci-dessus que rentrent les résultats obtenus dans les deux notes imprimées page 1 et page 107 de ce volume. Dans la première de ces notes, on se propose de prouver que l'équation

$$\int_x^X x^n \varphi(x)\, dx = 0$$

quand elle a lieu toutes les fois que n est zéro ou un nombre entier positif, entraîne la suivante $\varphi(x) = 0$. Le moyen que j'ai employé pour atteindre ce but est, à mon sens, le plus élégant dont on puisse faire usage. Ici l'on a $U_n = x^{n-1}$: la fonction P est égale à $A_1 + A_2 x + A_3 x^2 +$ etc. et jouit évidemment de la propriété énoncée (3°.). On peut donc appliquer le théorème indiqué (5°), et c'est ce que j'ai fait. Mais il est bon d'observer que si l'on prenait $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{y}{1}$, $A_3 = \frac{y^2}{1.2}$, etc., on aurait

$$P = 1 + \frac{yx}{1} + \frac{y^2x^2}{1.2} + \ldots = e^{yx}:$$

l'équation

$$\int_x^X P\varphi(x)dx = 0,$$

donnerait donc

$$\int_x^X e^{yx}\varphi(x)dx = 0,$$

et, à cause de l'indéterminée y, on en tirerait $\varphi(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. Ici se révèle un nouvel artifice qui consiste à introduire dans A_1, A_2, etc. une indéterminée y. On peut rattacher à cet artifice la méthode dont nous avons fait usage, M. Sturm et moi, dans un mémoire encore inédit dont l'extrait se trouve à la page 220 de ce volume.