
SECOND MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable ;.

PAR J. LIOUVILLE.

I.

Dans un premier mémoire sur ce sujet (*), j'ai eu pour but de trouver par un procédé direct et rigoureux la valeur de la série

$$(1) \quad \Sigma \left(\frac{\int_x^x g V f(x) dx}{\int_x^x g V^r dx} \right)$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à toutes les racines réelles et positives d'une certaine équation transcendante $\varpi(r) = 0$; V est une fonction de x et du paramètre r , assujettie à satisfaire à la fois l'équation différentielle

$$(2) \quad \frac{d\left(k \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l) V = 0,$$

dans laquelle les fonctions g , k , l de x sont supposées positives, et

(*) Tome I^{er} de ce Journal, page 253.

aux conditions définies

$$(3) \quad \frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = x,$$

$$(4) \quad \frac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ pour } x = X:$$

les coefficients constants h , H sont positifs, nuls ou infinis: lorsqu'on a $h = \infty$, l'équation (3), dont on peut diviser les deux membres par h , se réduit à

$$V = 0 \text{ pour } x = x;$$

de même, lorsqu'on a $H = \infty$, l'équation (4) se réduit à

$$V = 0 \text{ pour } x = X:$$

enfin $f(x)$ est une fonction arbitraire de x , assujettie pourtant aux conditions suivantes

$$(5) \quad \frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 \text{ pour } x = x,$$

$$(6) \quad \frac{df(x)}{dx} + Hf(x) = 0 \text{ pour } x = X.$$

La fonction V se présente utilement dans la théorie de la chaleur et dans une foule de questions physico-mathématiques; et M. Sturm en a développé les propriétés avec beaucoup de soin dans ses deux mémoires sur les équations différentielles et sur les équations aux différences partielles (*). A l'aide de ces propriétés que j'ai moi-même étudiées dans le mémoire cité plus haut et dans une note particulière, j'ai fait voir que la valeur de la série (1), lorsque cette série est convergente, ne peut qu'être égale à $f(x)$, du moins quand la variable x reste comprise entre les limites x , X . Dans cette hypothèse de la convergence de la série (1) et entre les limites x , X de x , on a donc

$$(7) \quad f(x) = \Sigma \left(\frac{V \int_x^X g^V f(x) dx}{\int_x^X g^{V^2} dx} \right)$$

(*) Tome I^{er} de ce Journal, page 106 et page 173.

L'équation $\varpi(r) = 0$ dont le paramètre r dépend n'a pas de racines négatives, comme on le reconnaît à l'inspection seule de cette équation. Elle n'a pas non plus de racines imaginaires; c'est ce que M. Poisson a prouvé depuis long-temps par un procédé très ingénieux. Mais il est bon d'observer que la méthode dont j'ai fait usage pour sommer la série (1) n'exige en aucune manière la connaissance du théorème de M. Poisson. Si l'équation $\varpi(r) = \sigma$ avait des racines imaginaires, on n'en tiendrait pas compte dans le second membre de l'équation (7), et cette équation subsisterait encore et se démontrerait par la même analyse. Pour l'exactitude de la démonstration que j'en ai donnée, il suffit en effet que les diverses fonctions V_1, V_2, \dots qui répondent aux racines réelles et positives r_1, r_2, \dots de l'équation $\varpi(r) = 0$ jouissent des propriétés que M. Sturm a reconnu leur appartenir. Au surplus, la réalité de toutes les racines de l'équation $\varpi(r) = 0$ résulte des propriétés mêmes de ces fonctions V_1, V_2, \dots qui répondent aux valeurs réelles et positives du paramètre r : c'est ce que je prouverai à la fin du présent mémoire.

Si nous revenons à la série (1), nous voyons qu'elle doit être encore l'objet d'une recherche nouvelle dont l'importance a été signalée par M. Sturm dans son dernier mémoire (*): il s'agit de prouver que cette série (1) est convergente; et j'ai eu le bonheur d'y parvenir il y a quelque temps, du moins dans le cas très étendu où les fonctions $g, k, f(x)$ et leurs dérivées premières et secondes conservent toujours des valeurs finies, lorsque x croît de x à X . Ma démonstration, quoique très simple, sera sans doute appréciée par les géomètres qui ont traité des questions semblables et qui savent combien en général elles offrent de difficultés. Elle consiste à prouver que si l'on désigne par n un indice très grand, par u_n la valeur absolue du $n^{\text{ième}}$ terme de la série (1) et par M un certain nombre indépendant de n et facile à calculer, on a $u_n < \frac{M}{n}$. Or, la série qui a pour terme général $\frac{M}{n}$ est convergente; donc à *fortiori* la série (1) l'est aussi, ce qu'il fallait démontrer. On peut trouver en outre une limite supérieure de l'erreur

(*) Tome I^{er} de ce Journal, page 411.

commise lorsque l'on prend pour valeur de $f(x)$ les n premiers termes de la série seulement.

La convergence de la série

$$\Sigma \left(\frac{Ve^{-t} \int_x^x g^V f(x) dx}{\int_x^x g^V dx} \right),$$

où l'on suppose $t > 0$, et qui représente l'état variable des températures dans une barre hétérogène, résulte aussi de notre analyse; cette dernière série est même plus facile à traiter que la série (1), et c'est par elle que nous commencerons.

En terminant cette introduction, je dois dire qu'ayant communiqué mon travail à M. Sturm, il a trouvé presque sur-le-champ une seconde démonstration de la convergence de la série (1), aussi simple que la mienne, et fondée sur ses propres principes.

II.

Cherchons d'abord à exprimer en série convergente la fonction V , qui satisfait à l'équation indéfinie (2) et aux conditions définies (3), (4). Pour cela désignons par k' ce que devient k lorsqu'on y pose $x = x$, et faisons

$$\begin{aligned} p_0 &= A \left(1 + hk' \int_x^x \frac{dx}{k} \right), \\ p_1 &= \int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) p_0 dx, \\ &\dots \dots \dots \\ p_{n+1} &= \int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) p_n dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Quel que soit le paramètre r , on satisfait évidemment aux équations (2) et (3) en posant

$$V = p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots;$$

A désigne une constante dont la valeur est tout-à-fait arbitraire, et

que l'on peut prendre égale à l'unité, ou mieux encore égale à $\frac{1}{1+h}$, pour avoir une expression de V qui convienne même au cas où $h=\infty$. En adoptant cette dernière valeur de A , on a, pour $x=x$,

$$V = \frac{1}{1+h}, \quad \frac{dV}{dx} = \frac{h}{1+h};$$

en général ces valeurs de V et $\frac{dV}{dx}$ sont différentes de zéro; V se réduit à zéro lorsque $h=\infty$, mais alors $\frac{dV}{dx}=1$; au contraire $\frac{dV}{dx}=0$, quand $h=0$, mais alors on a $V=1$. On voit par là que la fonction V ne devient identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r , tant que x reste indéterminée.

La série $p_0 + p_1 + \text{etc.}$ est convergente : prenons en effet les divers termes de cette série, abstraction faite de leurs signes, et désignons les par $P_0, P_1, \text{etc.}$; représentons par P et G les valeurs absolues les plus grandes des deux fonctions P_0 et $l-gr$ pour des valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X ; représentons aussi par k_0 la plus petite valeur de k . En remplaçant partout sous le signe \int (dans les intégrales multiples $P_0, P_1, \text{etc.}$) $l-gr$ par G , P_0 par P , k par k_0 , les valeurs de ces intégrales augmenteront évidemment. On aura donc

$$P_1 < \frac{GP}{k_0} \cdot \frac{(x-x)^2}{1.2},$$

$$P_2 < \left(\frac{GP}{k_0}\right)^2 \cdot \frac{(x-x)^4}{1.2.3.4},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n < \left(\frac{GP}{k_0}\right)^n \cdot \frac{(x-x)^{2n}}{1.2.3\dots 2n},$$

$$\dots \dots \dots$$

Or la série qui a pour terme général

$$\left(\frac{GP}{k_0}\right)^n \cdot \frac{(x-x)^{2n}}{1.2.3\dots 2n}$$

est convergente; donc à *fortiori* les séries $P_0 + P_1 + \text{etc.}$ et $p_0 + p_1 + \text{etc.}$ sont aussi convergentes, ce qu'il fallait démontrer. De plus l'erreur

commise, lorsque l'on prend pour V les n premiers termes seulement de la série $p_0 + p_1 + \dots$, est plus petite que la quantité

$$\left(\frac{GP}{k_0}\right)^n \cdot \frac{(x-x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} + \text{etc.},$$

dont il est aisé de trouver une limite supérieure.

On peut obtenir d'une autre manière une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur R_n commise en prenant

$$V = p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1}.$$

En effet, l'équation (2) et la condition (3) sont satisfaites en posant

$$(8) \quad V = p_0 + \int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) V dx.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace V par sa valeur que fournit précisément ce même second membre, on trouve ensuite

$$V = p_0 + p_1 + \int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) dx \int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) V dx :$$

remplaçant de nouveau, dans le second membre, V par sa valeur (8), et continuant indéfiniment cette opération, conformément à la méthode connue des approximations successives, on a enfin

$$V = p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} + R_n,$$

le reste R_n étant exprimé par l'intégrale multiple

$$\int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) dx \dots \int_x^x \frac{dx}{k} \int_x^x (l - gr) V dx,$$

dans laquelle le signe \int se trouve $2n$ fois.

La fonction V ne devenant jamais infinie, il est clair qu'elle est susceptible d'un maximum absolu W : en remplaçant, dans l'intégrale multiple ci-dessus, V par W , $l - gr$ par G , k par k_0 , on en augmentera donc la valeur numérique: d'après cela on a

$$R_n < W \cdot \left(\frac{GP}{k_0}\right)^n \cdot \frac{(x-x)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n},$$

ce qu'il fallait trouver et ce qui démontre de nouveau la convergence de la série $p_0 + p_1 + \dots$.

Jusqu'ici nous avons laissé le paramètre r indéterminé. Mais si l'on veut satisfaire à la condition (4), il faudra prendre pour ce paramètre une quelconque des racines de l'équation

$$\frac{dV}{dx} + HV = 0 \quad \text{pour } x = X,$$

laquelle, en mettant pour V sa valeur, devient

$$\frac{dp_0}{dx} + \frac{dp_1}{dx} + \dots + H(p_0 + p_1 + \dots) = 0 \quad \text{pour } x = X:$$

cette équation est celle que nous avons désignée par

$$\varpi(r) = 0,$$

dans notre premier mémoire. Les quantités p_0, p_1, \dots , et leurs dérivées étant essentiellement positives lorsqu'on prend $r < 0$, il en résulte que cette équation n'a pas de racines < 0 . M. Sturm a prouvé et tout-à-l'heure nous prouverons aussi qu'elle a un nombre infini de racines positives r_1, r_2, \dots qui sont de plus en plus grandes et croissent jusqu'à l'infini. Quant aux racines imaginaires, nous n'avons pas besoin de nous en occuper pour le moment.

III.

On peut transformer l'équation (2) de plusieurs manières et arriver ainsi à d'autres développements de la fonction V . Pour le montrer, je fais par exemple

$$z = \int_x^x \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot dx,$$

z désignant une nouvelle variable qui croît depuis 0 jusqu'à un certain maximum $Z = \int_x^X \sqrt{\frac{g}{k}} dx$, lorsque x croît depuis x jusqu'à X . Je prends cette variable z , au lieu de x , pour variable indépendante, et l'équation (2) devient

$$\frac{d\left(\sqrt{gk} \cdot \frac{dV}{dz}\right)}{dz} + \left(r\sqrt{gk} - l\sqrt{\frac{k}{g}}\right)V = 0,$$

ou bien

$$\sqrt{gk} \cdot \frac{d^2V}{dz^2} + \frac{d\sqrt{gk}}{dz} \cdot \frac{dV}{dz} + \left(r\sqrt{gk} - l\sqrt{\frac{k}{g}}\right)V = 0.$$

Maintenant si l'on pose

$$V = \theta U,$$

θ étant $= \frac{r}{\sqrt{gk}}$, le coefficient de $\frac{dU}{dz}$ sera égal à zéro dans l'équation

transformée, laquelle, en faisant $r = \rho^*$, et

$$l\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \theta - \frac{d\sqrt{gk}}{dz} \cdot \frac{d\theta}{dz} - \sqrt{gk} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} = \sqrt{gk} \cdot \theta \cdot \lambda,$$

sera de la forme

$$(9) \quad \frac{d^2U}{dz^2} + \rho^*U = \lambda U;$$

quant aux équations (3) et (4), si on leur applique les mêmes transformations, elles prendront la forme

$$(10) \quad \frac{dU}{dz} - h'U = 0 \quad \text{pour } z = 0,$$

$$(11) \quad \frac{dU}{dz} + H'U = 0 \quad \text{pour } z = Z,$$

h' , H' désignant deux constantes différentes de h , H et qui ne sont pas assujetties comme ces dernières à la condition d'être positives.

L'équation (9) étant de même forme que l'équation (2), on pourrait l'intégrer de la même manière : en désignant par A une constante arbitraire, et posant $p_0 = A(1 + h'z)$, puis en général

$$p_{n+1} = \int_0^z dz \int_0^z (\lambda - \rho^*) p_n dz,$$

on aurait en série convergente

$$V = p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots$$

Mais il est préférable de procéder de la manière suivante.

En multipliant par $\sin \rho z dz$ les deux membres de l'équation (9) puis intégrant et observant que

$$\left(\sin \rho z \frac{d^2 U}{dz^2} + \rho^2 U \sin \rho z \right) dz = d \left(\sin \rho z \frac{dU}{dz} - \rho U \cos \rho z \right),$$

on a

$$\sin \rho z \frac{dU}{dz} - \rho U \cos \rho z = A + \int_0^z \lambda U \sin \rho z dz.$$

En posant $z=0$, on trouve la valeur de la constante arbitraire $A = -\rho U$: la valeur de U , pour $z=0$, est tout-à-fait arbitraire à moins que l'on ait $h'=\infty$, auquel cas elle est nécessairement nulle, en excluant d'abord ce cas particulier, nous la supposerons égale à l'unité, ce qui nous donnera $A = -\rho$; en même temps, nous désignerons par λ' , U' ce que deviennent λ , U lorsqu'on y change z en z' ; et nous aurons

$$\int_0^z \lambda U \sin \rho z dz = \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz'.$$

L'équation précédente deviendra donc

$$(12) \quad \sin \rho z \frac{dU}{dz} - \rho U \cos \rho z = -\rho + \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz'$$

En multipliant l'équation (9) par $\cos \rho z dz$, intégrant et observant que, pour $z=0$, on a [d'après la condition (10)],

$$\frac{dU}{dz} = h'U = h',$$

on obtiendra de même

$$(13) \quad \cos \rho z \frac{dU}{dz} + \rho U \sin \rho z = h' + \int_0^z \lambda' U' \cos \rho z' dz'.$$

Des deux équations (12) et (13), on tire

$$(14) \quad U = \cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^z \lambda' U' \sin \rho (z - z') dz',$$

et

$$(15) \quad \frac{dU}{dz} = -\rho \sin \rho z + h' \cos \rho z + \int_0^z \lambda' U' \cos \rho(z-z') dz'.$$

Si maintenant on change z en z' , U se changera en U' : on pourra, dans le second membre de l'équation (14), mettre au lieu de U' sa valeur, et en continuant ainsi comme au n° II, on obtiendra la valeur de U exprimée par une série d'autant plus convergente que ρ sera plus grand,

IV.

Lorsque ρ n'est pas très grand, on trouve sans difficulté, par les méthodes de M. Sturm, les valeurs de z qui rendent V un maximum et les valeurs correspondantes de V . Il est donc facile de trouver alors la limite supérieure que nous avons désignée au n° II par la lettre W . Mais l'emploi des méthodes de M. Sturm étant trop pénible quand ρ est très grand, voici comment on peut y suppléer.

Soit Q la plus grande valeur que U puisse prendre lorsque z varie de 0 à Z , et L la plus grande valeur de λ dans le même intervalle; nous considérons les quantités Q et L , abstraction faite de leur signe. La valeur absolue de l'intégrale

$$\int_0^z \lambda' U' \sin \rho(z-z') dz',$$

dans laquelle z est compris entre 0 et Z , est donc toujours moindre que $LQ \int_0^z dz'$ et à *fortiori* moindre que LQZ . D'un autre côté le maximum de $\cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho}$ est $\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}$: donc le second membre de l'équation (10) est constamment plus petit que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{LQZ}{\rho},$$

ce qui exige que l'on ait

$$Q < \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{LQZ}{\rho}.$$

Pour des valeurs de ρ plus grandes que LZ , il vient donc

$$Q < \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2}}{1 - \frac{LZ}{\rho}}.$$

Lorsque l'on prend le paramètre ρ suffisamment grand et tel que l'on ait

$$\rho > 2LZ,$$

ce que nous admettrons désormais, il vient par conséquent

$$Q < 2\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2}.$$

Mais on a $V = \theta U$, et par suite $V < \Theta Q$, si Θ désigne le maximum absolu de θ : donc pour des valeurs de ρ suffisamment grandes, et en considérant seulement la valeur absolue de V , on a

$$V < 2\Theta\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2}.$$

semblablement, si l'on désigne par F ou F , le maximum d'une fonction donnée de x , savoir, $f(x)$ ou $f_1(x)$, on aura pour de très grandes valeurs de ρ ,

$$V \int_x^X g V f(x) dx < 4F \cdot G \cdot \Theta^2 \cdot (X - x) \cdot \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2\right],$$

$$V \int_x^X V f_1(x) dx < 4F_1 \cdot G \cdot \Theta^2 \cdot (X - x) \cdot \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2\right];$$

G représente ici, comme au n° II, le maximum de g .

V.

Occupons-nous maintenant de l'intégrale $\int_x^X g V^2 dx$, qui entre en

dénominateur dans le terme général de la série (1). En remplaçant la variable x par la variable z , on a

$$\int_x^X gV^* dx = \int_0^Z (g\theta^* \frac{dx}{dz}) U^* dz;$$

mais, d'après les valeurs de θ et de $\frac{dx}{dz}$, savoir

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{gk}}, \quad \frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{k}{g}},$$

on a

$$g\theta^* \frac{dx}{dz} = 1.$$

Il vient donc

$$(16) \quad \int_x^X g^* V dx = \int_0^Z U^* dz.$$

Posons

$$\int_0^\epsilon \lambda' U' \sin \rho(z - z') dz' = \epsilon,$$

l'équation (14) prendra la forme

$$(17) \quad U = \cos \rho z + \frac{h' \sin \epsilon z}{\rho} + \frac{\epsilon}{\rho};$$

il est clair que pour des valeurs de ρ suffisamment grandes la fraction $\frac{\epsilon}{\rho}$ devient plus petite que tout nombre donné, et il est même aisé de se convaincre qu'elle possède alors une valeur numérique inférieure à

$$\frac{2LZ}{\epsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2}.$$

Maintenant, en mettant au lieu de U sa valeur, l'équation (16) devient

$$\int_x^X gV^* dx = \int_0^Z dz \left(\cos \rho z + \frac{h' \sin \epsilon z}{\rho} + \frac{\epsilon}{\rho} \right)^2.$$

comme on a d'ailleurs

$$\int_0^Z \cos^2 \rho z dz = \frac{Z}{2} + \frac{\sin 2\rho Z}{4\rho},$$

$$\int_0^Z \sin^2 \rho z dz = \frac{Z}{2} - \frac{\sin 2\rho Z}{4\rho},$$

il en résulte que l'intégrale $\int_x^X gV^2 dx$ a une valeur de la forme

$$\int_x^X gV^2 dx = \frac{Z}{2} \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon} \right)^2 \right] + \frac{\eta}{\epsilon},$$

$\frac{\eta}{\epsilon}$ représentant une quantité que l'on rendra aussi petite que l'on voudra et par exemple plus petite que la moitié du premier terme

$$\frac{Z}{2} \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon} \right)^2 \right],$$

en prenant ρ suffisamment grand : pour des valeurs de ρ très grandes, on a donc

$$\int_x^X gV^2 dx > \frac{Z}{4} \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon} \right)^2 \right].$$

VI.

Revenons maintenant aux formules (14) et (15), lesquelles peuvent s'écrire ainsi

$$U = \cos \rho z \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz' \right) \\ + \sin \rho z \left(\frac{h'}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \int_0^z \lambda' U' \cos \rho z' dz' \right),$$

$$\frac{dU}{dz} = - \sin \rho z \left(\rho - \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz' \right) \\ + \cos \rho z \left(h' + \int_0^z \lambda' U' \cos \rho z' dz' \right);$$

nous en déduirons aisément la valeur de $\frac{dU}{dz} + H'U$ relative à $z = Z$,

et en égalant cette valeur à zéro (conformément à la condition (11)), nous aurons l'équation dont les valeurs de ρ dépendent. En posant

$$P = h' + H' + \int_0^Z \lambda' U' \left(\cos \rho z' - \frac{H' \sin \rho z'}{\epsilon} \right) dz',$$

$$P' = \frac{H'h'}{\epsilon} + \int_0^Z \lambda' U' \left(\frac{H' \cos \rho z'}{\epsilon} + \sin \rho z' \right) dz',$$

cette équation sera

$$P \cos \rho Z - (\rho - P') \sin \rho Z = 0,$$

d'où l'on tire

$$(18) \quad \text{tang } \rho Z = \frac{P}{\epsilon - P'} :$$

P et P' sont deux fonctions de ρ , la première paire, la seconde impaire : les racines de l'équation (18) sont donc deux à deux égales et de signes contraires, ce qui doit être, puisque l'on a posé $r = \rho^2$, d'où résulte $\rho = \pm \sqrt{r}$: il est aisé de voir en outre que l'équation (18) a une infinité de racines réelles : on s'en convaincra en regardant ρ comme une abscisse variable, et construisant les deux courbes qui ont respectivement pour équations $y = \text{tang } \rho Z$, $y = \frac{P}{\epsilon - P'}$, courbes dont la seconde a pour asymptote l'axe des abscisses.

Les grandes valeurs de ρ ou \sqrt{r} s'obtiennent sans difficulté puisque l'équation (18) résolue donne

$$\rho Z = (n - 1)\pi + \text{arc tang } \frac{P}{\epsilon - P'},$$

n désignant un nombre entier quelconque que nous supposons très grand. Cette expression générale de ρ fournit, à très peu près,

$$\rho \quad \text{ou} \quad \sqrt{r} = \frac{(n - 1)\pi}{Z},$$

ou plus exactement,

$$\rho \quad \text{ou} \quad \sqrt{r} = \frac{(n - 1)\pi}{Z} + \frac{P_0}{(n - 1)\pi},$$

P_0 étant $= k' + H' + \frac{1}{2} \int_0^Z \lambda dz$. Je ne m'arrêterai pas à démontrer cette dernière formule dont nous n'aurons jamais besoin.

En général les grandes valeurs de \sqrt{r} sont de la forme

$$\rho \text{ ou } \sqrt{r} = \frac{(n-1)\pi}{Z} + i_n,$$

i_n désignant une très petite quantité. Quand on donne à n une valeur déterminée très grande, la racine correspondante est précisément la $n^{\text{ième}}$ des racines r_1, r_2, \dots rangées par ordre de grandeur. Pour constater ce fait, il suffit d'observer que lorsque ρ est très grand (auquel cas on a à très peu près $\rho = \frac{(n-1)\pi}{Z}$), U se réduit sensiblement à

$$U = \cos \rho z = \cos \frac{(n-1)\pi z}{Z};$$

par suite V devient

$$V = \frac{1}{\sqrt{gk}} \cos \frac{(n-1)\pi z}{Z},$$

et s'évanouit précisément $(n-1)$ fois lorsque z croît de 0 à Z , c'est-à-dire lorsque x croît de x à X . En vertu d'un théorème de M. Sturm, cette valeur de V_n est donc celle qui répond à la $n^{\text{ième}}$ racine r_n . D'après cette démonstration qu'il serait aisé de rendre plus rigoureuse en tenant compte des quantités infiniment petites qui ont été négligées, on a pour un indice n très grand

$$\sqrt{r_n} = \frac{(n-1)\pi}{Z} + i_n = \frac{3n}{Z} + \frac{(\pi-3)n}{Z} - \frac{\pi}{Z} + i_n,$$

et par suite

$$\sqrt{r_n} > \frac{3n}{Z},$$

puisque π est > 3 , et que $-\frac{\pi}{Z} + i_n$, n'a jamais une valeur considérable. De là résulte finalement

$$r_n > \frac{9n^2}{Z^2}.$$

VII.

En combinant ensemble les deux inégalités

$$\begin{aligned} V \int_x^X gVf(x)dx &< 4F.G.\Theta^2.(X-x) \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2 \right], \\ \int_x^X gV^2dx &> \frac{Z}{4} \left[1 + \left(\frac{h'}{\epsilon}\right)^2 \right], \end{aligned}$$

que nous avons obtenues l'une au n° IV, l'autre au n° V, il vient

$$\frac{V \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx} < \frac{16F.G.\Theta^2.(X-x)}{Z} ;$$

le terme général de la série formant le second membre de l'équation

$$(19) \quad u = \Sigma \left(\frac{Ve^{-n} \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx} \right),$$

a donc une valeur absolue plus petite que

$$\frac{16F.G.\Theta^2.(X-x)e^{-n}}{Z} ;$$

or, quand on suppose $t > 0$, la série qui a pour terme général cette dernière quantité est évidemment convergente: donc à *fortiori* la série (19) est aussi convergente.

Lorsqu'on a $t = 0$, la série (19) se change dans la série (1), et il faut une autre démonstration. En multipliant par $f(x)$ les deux membres de l'équation (2), on en déduit

$$gVf(x)dx = \frac{1}{r} lVf(x)dx - \frac{1}{r}.d\left(k \frac{dV}{dx}\right) ;$$

intégrant ensuite à partir de $x = x$ jusqu'à $x = X$, il vient

$$(20) \quad \int_x^X gV f(x) dx = \frac{1}{r} \int_x^X lV f(x) dx - \frac{1}{r} \int_x^X f(x) d\left(k \frac{dV}{dx}\right).$$

Une double intégration par parties donne

$$\int f(x) d\left(k \frac{dV}{dx}\right) = k \left(f(x) \frac{dV}{dx} - V \frac{df(x)}{dx} \right) + \int V d\left(k \frac{df(x)}{dx}\right).$$

Mais à la limite x de x on a

$$\frac{dV}{dx} - hV = 0, \quad \frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0,$$

d'où résulte, en éliminant h ,

$$f(x) \frac{dV}{dx} - V \frac{df(x)}{dx} = 0;$$

cette même quantité

$$f(x) \frac{dV}{dx} - V \frac{df(x)}{dx}$$

est nulle aussi à l'autre limite X par une raison semblable. D'après cela, on obtient

$$\int_x^X f(x) d\left(k \frac{dV}{dx}\right) = \int_x^X V d\left(k \frac{df(x)}{dx}\right),$$

moyennant quoi l'équation (20) se réduit à

$$\int_x^X gV f(x) dx = \frac{1}{r} \int_x^X V f_1(x) dx,$$

$f_1(x) dx$ représentant la fonction

$$l f(x) dx - d\left(k \frac{df(x)}{dx}\right).$$

Le terme général de la série (1) peut donc être mis sous la forme

$$\frac{V \int_x^X V f_1(x) dx}{r \int_x^X g V^2 dx} ;$$

en supposant que ce terme général soit le $n^{\text{ème}}$ (n étant un indice très grand) et désignant par u_n sa valeur absolue, il suffira maintenant de combiner les inégalités

$$V \int_x^X V f_1(x) dx < 4F_1 \cdot G \cdot \Theta^2 \cdot (X-x) \left[1 + \left(\frac{h'}{e} \right)^2 \right],$$

$$\int_x^X g V^2 dx > \frac{Z}{4} \left[1 + \left(\frac{h'}{e} \right)^2 \right], \quad r_n > \frac{9n^2}{Z},$$

et de poser

$$\frac{16F_1 \cdot G \cdot \Theta^2 \cdot Z \cdot (X-x)}{9} = M,$$

pour en conclure $u_n < \frac{M}{n^2}$. Or la série qui a pour terme général $\frac{M}{n^2}$ est convergente: donc la série (1) l'est aussi, ce qu'il fallait prouver. De plus l'erreur commise en égalant $f(x)$ à la somme des n premiers termes de cette série est moindre que

$$M \Sigma \left(\frac{1}{\mu^2} \right),$$

quantité dont il est aisé de trouver une limite supérieure et dans laquelle μ prend successivement toutes les valeurs entières comprises entre n et ∞ .

La valeur de u fournie par la série placée au second membre de l'équation (19) représente au bout du temps t , dans une barre hétérogène, la température du point dont l'abscisse est x (*). La vitesse de refroidissement $-\frac{du}{dt}$ est donc exprimée par la série

$$\Sigma \left[\frac{V e^{-n \cdot r} \cdot \int_x^X g V f(x) dx}{\int_x^X g V^2 dx} \right].$$

(*) Tome I^{er} de ce Journal, page 411.

Pour des valeurs positives de t , la convergence de cette série résulte évidemment de l'analyse précédente.

On démontrerait de la même manière la convergence des deux séries

$$\Sigma \frac{V \cos(t\sqrt{r}) \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2 dx}, \quad \Sigma \frac{V \sin(t\sqrt{r}) \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2 dx},$$

qui servent à résoudre plusieurs problèmes de mécanique.

Nous avons dans tout ce qui précède considéré les deux constantes h' , H' comme ayant des valeurs finies. Quand une d'elles est infinie, on doit donc un peu modifier notre analyse; mais les modifications qu'il faut y apporter sont tellement légères que je regarde comme entièrement inutile de les développer ici.

VIII.

Revenons maintenant à l'équation $\varpi(r) = 0$ qui détermine le paramètre r , et prouvons que cette équation a toutes ses racines réelles. Pour cela rappelons un lemme que j'ai démontré dans mon premier mémoire (*), et que l'on peut énoncer ainsi : soit V_n une quelconque des fonctions $V_1, V_2, \text{ etc.}$, qui se déduisent de V en y remplaçant r successivement par les racines réelles $r_1, r_2, \text{ etc.}$, de l'équation $\varpi(r) = 0$: si une fonction $\phi(x)$ est telle qu'on ait

$$(21) \quad \int_x^X V_n \phi(x) dx = 0,$$

l'indice n restant indéterminé, cette fonction $\phi(x)$ sera égale à zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X .

Ce lemme ne cesse pas d'être exact quand la fonction $\phi(x)$ est imaginaire et de la forme $f(x) + \sqrt{-1} \cdot F(x)$; car alors l'équation

(*) Tome I^{er} de ce Journal, page 261.

(21) se décompose dans les deux suivantes

$$\int_x^X V_n f(x) dx = 0, \quad \int_x^X V_n F(x) dx = 0,$$

qui donnent séparément $f(x) = 0$, $F(x) = 0$ et par suite $\varphi(x) = 0$.

Maintenant soit, s'il est possible, r' une racine imaginaire de l'équation $\varphi(r) = 0$ et V' la valeur de V correspondante : aucune des différences $r' - r_1, r' - r_2, \dots$ ne sera nulle : par une formule connue on aura donc, quel que soit l'indice n ,

$$\int_x^X gV'V_n dx = 0,$$

d'où l'on conclura $gV' = 0$, et par suite $V' = 0$, pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X . Or cela est absurde : en effet on peut toujours se donner arbitrairement et supposer, par exemple, égale à l'unité, pour $x = x$, soit la valeur de V' , soit celle de $\frac{dV'}{dx}$, ces deux valeurs étant assujetties à la seule relation $\frac{dV'}{dx} - hV' = 0$; d'où il résulte que pour des valeurs de x très rapprochées de x et un peu plus grandes, la fonction V' est différente de zéro. Donc l'équation $\varphi(r) = 0$ n'a pas de racines imaginaires, C. Q. F. D.