MÉMOIRE

Sur les Équations différentielles linéaires du second ordre;

Par C. STURM.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 28 septembre 1833.)

La résolution de la plupart des problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de formes diverses et aux petits mouvements oscillatoires des corps solides élastiques, des corps flexibles, des liquides et des fluides élastiques, conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre qui renferment une fonction inconnue d'une variable indépendante et ses différentielles première et seconde multipliées par des fonctions données de la variable. On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs *maxima* ou *minima*. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les fonctions dont je me suis occupé ont, comme on le verra, des analogies remarquables avec les sinus et les exponentielles, et peuvent, dans certains cas, être évaluées numériquement avec une approximation suffisante à l'aide des tables logarithmiques et trigonométriques. La même théorie fournit les moyens de calculer les racines de ces équations transcendantes qui se présentent dans la physique mathématique, et fait connaître les propriétés singulières dont jouissent ces racines. Le principe sur lequel reposent les théorèmes que je développe, n'a jamais, si je ne me trompe, été employé dans l'analyse, et il ne me paraît pas susceptible de s'étendre à d'autres équations différentielles. Dans un autre Mémoire, j'exposerai les applications de cette théorie à quelques problèmes, et un grand nombre de lois qui en résultent.

I.

Je considère l'équation différentielle

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NV = 0; \qquad (1)$$

V est une fonction inconnue de la variable x qui doit satisfaire à cette équation pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données x, X; L, M, N, sont des fonctions de x données pour toutes les valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X. Je commence par ramener l'équation différentielle proposée à la forme suivante,

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (I)$$

On rend les deux équations (1) et (I) identiques, en posant

$$\frac{M}{L} = \frac{dK}{Kdx}, \quad \text{et } \frac{N}{L} = \frac{G}{K};$$

d'où l'on tire

$$K = e^{\int \frac{Mdx}{L}}, \quad G = \frac{N}{L} \cdot e^{\int \frac{Mdx}{L}}.$$

On connaît ainsi les fonctions K et G dans la nouvelle équation (I), qui prend la place de l'équation (1). Mais ordinairement, les équations du second ordre qui proviennent des problèmes de physique mathématique, se présentent immédiatement sous la forme de l'équation (I), de sorte qu'on est dispensé de leur faire subir la transformation que nous venons d'effectuer sur l'équation (1).

L'intégrale complète de l'équation (I) doit contenir deux constantes arbitraires, pour lesquelles on peut prendre les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ correspondantes à une valeur particulière de x. Lorsque ces valeurs sont fixées, la fonction V est entièrement définie par l'équation (I), elle a une valeur déterminée et unique pour chaque valeur de x.

En écrivant l'équation (I) ainsi

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + GV = 0,$$

et en la différentiant ensuite autant de fois qu'on voudra, on voit que si la fonction K devenait nulle pour des valeurs particulières de x, $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, etc., pourraient devenir infinies en même temps que K s'annullerait, et par suite la fonction V pourrait aussi devenir infinie. Pour supprimer cette cause de discontinuité, nous supposerons toujours que K soit constamment positive entre les limites **X**, **X**, et que si elle est nulle à l'une de ces limites, on ait en même temps

$\frac{dK}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} + GV = 0$ afin que la valeur de $\frac{d^2V}{dx^2}$ fournie par l'équation (1) ne soit pas infinie. D'ailleurs G est tout-à-fait arbitaire.

II.

Lorsque la fonction V s'évanouit pour une valeur particulière de x, $\frac{dV}{dx}$ ne peut pas s'évanouir en même temps.

En effet, il résulte de l'équation (I) que, si V et $\frac{dV}{dx}$ étaient nulles pour une même valeur de x, toutes les fonctions dérivées $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, ... s'évanouiraient en même temps que V et $\frac{dV}{dx}$, et par suite V serait nulle pour toutes les valeurs de x. Mais voici une démonstration plus rigoureuse de cette proposition.

Supposons que V ne soit pas nulle pour $x = a$. On peut concevoir une fonction V′ qui, prise pour V, satisfasse à l'équation (I) et qui d'ailleurs diffère de V en ce qu'on se donne à volonté pour $x = a$ des valeurs de V′ et de $\frac{dV'}{dx}$ différentes de celles de V et de $\frac{dV}{dx}$.

On a donc les deux équations

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

$$\frac{d\left(K\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + GV' = 0,$$

d'où l'on tire, en multipliant la première par $V'dx$, la seconde par Vdx, et retranchant

$$V'.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\left(K\frac{dV'}{dx}\right) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est la différentielle de... $K\left(V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}\right)$; en intégrant, on a donc

$$K\left(V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}\right) = C,$$

C étant une constante arbitraire.

On suppose que V n'est pas nulle pour $x=a$, et l'on peut se donner à volonté pour $x=a$ des valeurs de V' et $\frac{dV'}{dx}$ telles que la formule $K\left(V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}\right)$ ait pour $x=a$ une valeur différente de zéro, qui sera celle de la constante C. On voit alors que pour toute autre valeur de x, on ne peut pas avoir en même temps $V=0$ et $\frac{dV}{dx}=0$, puisqu'il s'ensuivrait $C=0$, contre l'hypothèse.

Ainsi $\frac{dV}{dx}$ ne peut jamais se trouver nulle en même temps que V. Il s'ensuit que V change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Car si V est nulle pour $x=\xi$, il résulte de la définition même de $\frac{dV}{dx}$, que V aura pour les valeurs de x un peu plus grandes que ξ le signe de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=\xi$, et le signe contraire pour les valeurs de x un peu moindres que ξ; en sorte que, quand x en croissant atteint et dépasse la valeur ξ, V en s'évanouissant passe de l'état négatif au positif, ou du positif au négatif, selon que la valeur de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=\xi$ est positive ou négative.

III.

La fonction V dépend implicitement des fonctions G et K et des valeurs arbitraires A et B qu'on peut attribuer à V et à $\frac{dV}{dx}$ pour une valeur particulière de x.

Nous allons examiner quel changement V éprouvera, si l'on altère en même temps les fonctions G et K pour chaque valeur de x, et les constantes A, B, de quantités infiniment petites, ou pour parler avec plus de rigueur, aussi petites qu'on voudra.

Pour fixer les idées et pour abréger le discours, nous regarderons les quantités G, K, A, B, comme fonctions d'un paramètre indéterminé et indépendant de x que nous désignerons par m; elles seront des fonctions de m tout-à-fait arbitraires, assujetties à la seule condition de varier par degrés insensibles en même temps que m : on pourra d'ailleurs ne pas faire varier ces quantités G, K, A, B, toutes à la fois avec m; on pourra supposer aussi que la fonction G ou K reste la même pour certaines valeurs de x, malgré la variation de m; en un mot, les altérations infiniment petites que G, K, A, B, éprouveront quand m variera infiniment peu, seront entièrement arbitraires.

Pour exprimer que ces fonctions G, K, varient non-seulement par la variation de x, mais encore par celle du paramètre m, nous les désignerons, quand il en sera besoin, par $G(x, m)$ et $K(x, m)$. De même V qui dépend implicitement de x et de m sera représentée par $V(x, m)$, et dans cette expression, on pourra remplacer x ou m par telle valeur particulière qu'on voudra.

On peut considérer les deux variables indépendantes x et m comme étant les coordonnées rectangulaires x et y d'un point pris à volonté sur un plan horizontal, et concevoir une ordonnée z perpendiculaire à ce plan en ce point-là, et égale à la valeur de la fonction $G(x, m)$ correspondante aux valeurs actuelles de x et de m. On aura ainsi, en faisant varier x et m, une surface représentée par l'équation $z = G(x, m)$. A chaque valeur particulière de m correspond sur cette surface une courbe dont le plan est parallèle au plan xz à la distance m, et dont les ordonnées verticales représentent les valeurs successives de la fonction G pour cette valeur de m. Cette courbe change de forme insensiblement et engendre la surface quand m varie par degrés insensibles. On peut de même imaginer deux autres surfaces dont les ordonnées verticales représentent les deux fonctions $K(x, m)$ et $V(x, m)$.

IV.

En concevant ainsi les altérations arbitraires des quantités G, K, A, B, comme produites par la seule variation du paramètre m, faisons maintenant varier m dans l'équation (I). Désignons par la caractéristique δ cette espèce de variation, indépendante de celle indiquée par d qui se rapporte à x.

En observant que l'on a en général pour toute fonction P de x et de m,

$$\delta d\mathrm{P} = d\delta\mathrm{P},$$

ce qui revient à
$$\frac{d\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)}{dm} = \frac{d\left(\frac{d\mathrm{P}}{dm}\right)}{dx}$$

l'équation
$$\frac{d.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{GV} = 0, \qquad (1)$$

différentiée par rapport à m, donnera

$$\frac{d.\delta.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}\delta\mathrm{V} + \mathrm{V}\delta\mathrm{G} = 0. \qquad (2)$$

Multiplions l'équation (1) par $\delta\mathrm{V}.dx$, l'équation (2) par $-\mathrm{V}.dx$, et ajoutons les produits, nous aurons

$$\delta\mathrm{V}.d.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) - \mathrm{V}.d.\delta\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \mathrm{V}^2\delta\mathrm{G}.dx. \qquad (3)$$

Intégrons les deux membres de cette équation, par rapport à x, depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur indéterminée de x.

En intégrant par parties le premier terme $\delta\mathrm{V}.d.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)$, sans fixer les limites de l'intégration, on trouve

$$\int\delta\mathrm{V}.d.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \delta\mathrm{V}.\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \int\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}.\frac{d\delta\mathrm{V}}{dx}.dx.$$

On a de même

$$\int\mathrm{V}.d.\delta\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \mathrm{V}.\delta.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) - \int\delta\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right).\frac{d\mathrm{V}}{dx}.dx;$$

ou bien $\left[\text{à cause de } \delta.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \frac{d\mathrm{V}}{dx}.\delta\mathrm{K} + \mathrm{K}\frac{\delta d\mathrm{V}}{dx}\right]$

$$\int\mathrm{V}.d.\delta\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \mathrm{V}.\delta.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) - \int\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2.\delta\mathrm{K}.dx - \int\mathrm{K}\frac{\delta d\mathrm{V}}{dx}.\frac{d\mathrm{V}}{dx}.dx.$$

En retranchant cette dernière intégrale de la précédente, on aura donc

$$\int \delta V.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)-\int V.d.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)=\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\int\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.$$

C'est l'intégrale indéfinie du premier membre de l'équation (3) : par conséquent en intégrant cette équation depuis $x = \text{x}$ jusqu'à une valeur quelconque de x, on aura

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=C+\int_{\text{x}}^{x}V^2.\delta G.dx-\int_{\text{x}}^{x}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx. \quad (4)$$

La constante C introduite par l'intégration est égale à la valeur de la formule $\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)$, pour $x = \text{x}$, et l'on peut attribuer à δV et à $\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)$ des valeurs arbitraires pour $x = \text{x}$.

Si au lieu d'intégrer l'équation (3) entre les limites x et x, on l'intègre entre les limites x et X, on aura de même l'équation suivante :

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=C'-\int_{x}^{X}V^2.\delta G.dx+\int_{x}^{X}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx, \quad (5)$$

la constante C' étant égale à la valeur de $\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)$ pour $x = X$.

On remarquera qu'on a identiquement

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=\left(K\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta.\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right), \quad (6)$$

et aussi

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=-V^2.\delta.\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right). \quad (7)$$

V.

La formule (4) peut encore se déduire d'une autre qu'il est bon de connaître.

Combinons l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

avec cette autre équation de même forme

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

dans laquelle G′ et K′ sont des fonctions quelconques de x différentes de G et de K. Ces deux équations donnent la suivante :

$$V'.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right) = (G' - G)\,VV'dx. \qquad (8)$$

Or, on a

$$\int V'.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) = V'.K\frac{dV}{dx} - \int K\frac{dV}{dx}.\frac{dV'}{dx}.dx.$$
$$\int V.d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right) = V.K'\frac{dV'}{dx} - \int K'\frac{dV'}{dx}.\frac{dV}{dx}.dx.$$

Conséquemment en intégrant l'équation (8) depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur quelconque de x, on aura (9)

$$V'.K\frac{dV}{dx} - V.K'\frac{dV'}{dx} = C + \int_{\mathrm{x}}^{x} VV'(G'-G)dx - \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dV}{dx}.\frac{dV'}{dx}.(K'-K)dx.$$

La constante arbitraire C étant égale à la valeur du premier membre $V'.K\frac{dV}{dx} - V.K'\frac{dV'}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$.

Si l'on suppose actuellement les différences $G' - G$, $K' - K$, infiniment petites, et les valeurs de V′ et de $K'\frac{dV'}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ infiniment peu différentes de celles de V et de $K\frac{dV}{dx}$, V′ différera infiniment peu de V, et en faisant $G' = G + \delta G$, $K' = K + \delta K$, $V' = V + \delta V$ dans l'équation (9), elle deviendra l'équation (4) du numéro précédent.

Il reviendrait au même de différentier cette équation (9), par rapport au paramètre m qui n'entre que dans G, K et V et non dans

G', K' et V', et de faire après cette différentiation, $G' = G$, $K' = K$ et par suite $V' = V$, en prenant d'ailleurs la constante C égale à la valeur du premier membre pour $x = \mathrm{x}$.

On arrivera de la même manière à la formule (5).

VI.

A l'inspection de l'équation (4), on reconnait que l'expression $\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(K \frac{dV}{dx}\right)$ équivalente à $\left(K \frac{dV}{dx}\right)^2 \delta . \left(\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}\right)$ et aussi à $- V^2 . \delta . \left(\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}\right)$ aura pour chaque valeur de x une valeur différente de zéro et positive, si le second membre de cette équation (4) est positif pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X. Or, on le rendra tel, si, en supposant δm positive, on prend la constante C positive ou nulle, la variation arbitraire δG aussi positive ou nulle, et δK négative ou nulle, pourvu toutefois qu'on ne suppose pas ces quantités C, δG et δK, nulles toutes trois en même temps. En considérant que C représente la valeur de $\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(\frac{dV}{dx}\right)$ pour $x = \mathrm{x}$, on voit que prendre C positive ou nulle, c'est supposer que la valeur du rapport $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ augmente ou du moins ne diminue pas, quand on fait croître m, ou ce qui revient au même, que la valeur du rapport inverse $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ diminue ou du moins n'augmente pas, quand m augmente; en particulier, si l'on a $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, il faut admettre que la valeur de $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient positive, ou demeure nulle, quand m augmente; et, si l'on a $K \frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, que celle de $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient négative ou reste nulle, quand m augmente.

Lorsqu'on fait δG positive et δK négative, on suppose que, pour chaque valeur de x la valeur de G augmente et celle de K diminue, tandis que m augmente. Et quand on fait δG ou δK nulle pour certaines valeurs de x, alors pour ces valeurs-là, G ou K conserve la même grandeur, malgré la variation de m.

En admettant donc ces hypothèses qui rendent le second membre de l'équation (4) positif, et observant que le premier........ $\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(K \frac{dV}{dx}\right)$ peut être présenté sous les deux formes (6) et (7), on voit, que pour chaque valeur de x, la variation $\delta . \left(\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}\right)$ sera positive, et $\delta . \left(\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}\right)$ négative, ce qui signifie que la valeur de l'expression $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ augmente quand m augmente, ou que celle de $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ diminue. On a donc cette proposition :

Si pour chaque valeur de x la valeur de la fonction G augmente infiniment peu, si en même temps K diminue, et si la valeur du rapport $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ pour $x = \text{x}$ augmente ou si celle du rapport inverse $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ diminue, pour toute autre valeur de x plus grande que x, la valeur de $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ augmentera ou celle de $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ diminuera infiniment peu. Et il en sera de même, si les altérations indiquées n'ont pas lieu toutes à la fois, pourvu qu'une d'elles au moins ait lieu.

VII.

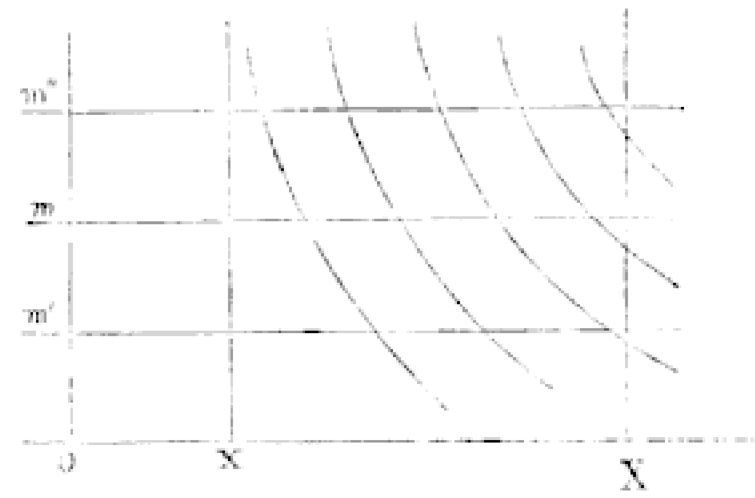
En admettant toujours les hypothèses énoncées dans le numéro précédent, nous allons maintenant considérer les différentes valeurs de x qui annullent la fonction V et montrer que chacune de ces valeurs diminue quand m augmente. Cette proposition est fondée sur ce que, d'après la formule (4), toutes les fois que V est nulle, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\partial V}{\partial m}$ ont des valeurs différentes de zéro et de même signe.

En effet, supposons que V soit nulle pour des valeurs particulières de x et de m. Si l'on donne à ces valeurs de x et de m des accroissements infiniment petits dx et dm, la fonction V deviendra $V + \frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dm}\,dm$, et cette fonction sera encore nulle pour ces nouvelles valeurs $x+dx$ et $m+dm$, si l'on a $\frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dm}\,dm = 0$. On tire de là $\frac{dm}{dx} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dm}}$.

Cette valeur du rapport $\frac{dm}{dx}$ est négative; car, en vertu de la formule (4), lorsque V est nulle, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\partial V}{\partial m}$ ou $\frac{dV}{dm}$ ont des valeurs différentes de zéro et de même signe. Les accroissements infiniment petits dx et dm qu'il faut donner aux valeurs de x et de m qui annullent V pour avoir toujours $V = 0$, doivent donc être de signes contraires; en d'autres termes, chaque valeur de x qui annulle V diminue quand m augmente, et augmente quand m diminue.

On peut rendre plus sensible la vérité de cette proposition par la considération de la courbe qui est le lieu géométrique des points pour lesquels on a $V(x, m) = 0$, en regardant x et m comme des coordonnées relatives à deux axes tracés sur un plan. Supposons qu'on passe d'un point de cette courbe ayant pour coordonnées x et m à un autre point infiniment voisin sur la même courbe dont les coordonnées soient $x + dx$ et $m + dm$. On aura le rapport des accroissements infiniment petits dx et dm en différentiant l'équation de la courbe $V(x, m) = 0$. On en tire $\frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dm}\,dm = 0$; puis $\frac{dm}{dx} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dm}}$, valeur négative, à cause de l'équation (4). Donc quand on passe d'un point de la courbe $V(x, m) = 0$ à un autre point infiniment voisin sur la même courbe, la valeur de m augmente, tandis que celle de

x diminue, ou bien au contraire m diminue et x augmente. Ainsi, chaque branche de cette courbe, en s'éloignant de l'axe des x, se dirige vers la gauche du côté des x négatives, comme l'indique la figure.



VIII.

La proposition dont il s'agit peut encore se démontrer d'une manière tout-à-fait rigoureuse, sans aucune considération de quantités infiniment petites, comme nous allons l'expliquer.

Attribuons à l'indéterminée m une valeur particulière quelconque μ, et supposons que la fonction $V(x, \mu)$ s'évanouisse pour différentes valeurs de x. Nous avons vu, n° II, que cette fonction doit changer de signe chaque fois qu'elle s'évanouit.

Attribuons encore à m une nouvelle valeur μ' qui surpasse la première μ d'une quantité aussi petite qu'on voudra. Nous allons démontrer que la nouvelle fonction $V(x, \mu')$ s'évanouira et changera de signe entre les limites x et X au moins autant de fois que $V(x, \mu)$, pour des valeurs de x un peu moindres que celles qui annullent $V(x, \mu)$.

Soit ξ l'une quelconque des valeurs de x pour lesquelles $V(x, \mu)$ s'évanouit, de sorte que $V(\xi, \mu) = 0$. D'après la formule (4), $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\partial V}{\partial m}$ doivent avoir, pour $x = \xi$ et $m = \mu$ des valeurs différentes de zéro et de même signe.

Attribuons à x une valeur a plus petite que ξ, telle que pour cette valeur a et pour toute autre comprise entre a et ξ la fonction $V(x,\mu)$ ne soit point nulle et conserve constamment le même signe : on peut toujours prendre a assez près de ξ pour que cette condition soit remplie. Alors $V(x, \mu)$ aura pour $x = a$ le même signe qu'elle a pour les valeurs de x un peu moindres que ξ, et par conséquent un signe contraire au signe de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=\xi$; car pour les valeurs de x un peu plus petites que ξ, $V(x, \mu)$ a un signe contraire à celui de $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$.

Considérons maintenant $V(x, \mu')$: si l'on y fait d'abord $x=a$, $V(a, \mu')$ aura une valeur différente de zéro et de même signe que $V(a, \mu)$ qui n'est pas nulle; en effet on peut toujours prendre μ' assez peu différente de μ, pour qu'en faisant croître m depuis μ jusqu'à μ', la fonction $V(a, m)$ ne change pas de signe. Ainsi $V(x, \mu')$ aura comme $V(x, \mu)$ pour $x=a$, un signe contraire à celui de $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$.

Si l'on fait $x=\xi$, $V(\xi, \mu')$ aura le signe de $\frac{\delta V}{\delta m}$ pour $x=\xi$ et $m=\mu$. Car V étant nulle pour $x=\xi$ et $m=\mu$, doit prendre pour $x=\xi$ et pour une valeur de m, telle que μ', un peu plus grande que μ, le signe de la fonction dérivée $\frac{\delta V}{\delta m}(\xi, \mu)$. Or, en vertu de l'équation (4) dont le second membre est positif, $\frac{\delta V}{\delta m}$ a le même signe que $\frac{dV}{dx}$, toutes les fois que V est nulle. Donc $V(x, \mu')$ a pour $x=\xi$ le même signe que $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$.

Mais on a vu tout à l'heure que, pour $x=a$, $V(x, \mu')$ a le signe contraire à celui de cette même quantité $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$; donc $V(x, \mu')$ ayant pour $x=a$ et pour $x=\xi$ deux valeurs de signes contraires, doit s'évanouir et changer de signe au moins une fois pour une valeur de x comprise entre a et ξ.

On conçoit que cette valeur de x plus petite que ξ qui annulle $V(x, \mu')$ doit différer infiniment peu de ξ, si μ' surpasse μ d'une quantité infiniment petite, puisqu'on pourra prendre l'autre limite a aussi près qu'on voudra de ξ, en remplissant toujours la condition que $V(x, \mu)$ ne change pas de signe dans l'intervalle de a à ξ.

On peut représenter et résumer ce qui précède par le tableau suivant :

$$\begin{array}{llcccc l}
 & \text{Pour } x = a \ldots\ldots\ldots & & & \xi & & \\
\text{on a} & V(x,\ \mu) & - - - - & & \text{o} & \Big\} & \text{quand, pour } x=\xi \text{ et } m=\mu, \\
 & V(x,\ \mu') & - & \text{o} & + & & \dfrac{dV}{dx} \text{ et } \dfrac{\delta V}{\delta m} \text{ ont le signe } +,
\end{array}$$

ou bien,

$$\begin{array}{lccc l}
V(x,\ \mu) & + + + + + & & \text{o} & \Big\}\ \text{quand pour } x=\xi \text{ et } m=\mu, \\
V(x,\ \mu') & + & \text{o} & - & \quad \dfrac{dV}{dx} \text{ et } \dfrac{\delta V}{\delta m} \text{ ont le signe } -.
\end{array}$$

Le o placé entre les deux signes contraires de $V(x, \mu')$ pour $x=a$ et $x=\xi$ indique l'évanouissement de cette fonction pour une valeur de x comprise entre a et ξ.

On vient de voir qu'à chaque valeur de x telle que ξ qui annulle $V(x, \mu)$ correspond toujours une valeur de x un peu moindre que ξ qui annulle $V(x, \mu')$, et l'on remarquera que cette proposition subsiste dans le cas même où la plus grande des valeurs de x désignées par ξ qui annullent $V(x, \mu)$ serait précisément égale à la limite X.

Il est nécessaire de prouver aussi que réciproquement à chaque valeur de x comprise entre x et X qui annulle $V(x, \mu')$ correspond une valeur de x un peu plus grande qui annulle $V(x, \mu)$. La démonstration de cette proposition inverse est semblable à la précédente. Nous l'énoncerons en peu de mots.

Supposons que $V(x,\mu')$ soit nulle pour $x=\xi'$. On peut donner à x une valeur b plus grande que ξ' telle que $V(x, \mu')$ ait toujours le même signe quand x croîtra depuis ξ' jusqu'à b ; ce signe sera celui de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=\xi'$ et $m=\mu'$. La quantité $V(b, \mu)$ aura le même signe que $V(b, \mu')$ si la différence entre μ et μ' est suffisamment petite. Comme on a $V(\xi',\mu')=0$, et que μ est plus petite que μ', $V(\xi', \mu)$ aura un signe contraire à celui de $\frac{\delta V}{\delta m}(\xi', \mu')$ et conséquemment contraire à celui de $\frac{dV}{dx}(\xi', \mu')$ en vertu de l'équation (4). Mais $V(b, \mu)$ a le même signe que cette quantité $\frac{dV}{dx}(\xi', \mu')$; $V(x, \mu)$ a donc deux valeurs de signes contraires pour $x=\xi'$ et pour $x=b$; ainsi $V(x, \mu)$ doit s'évanouir et changer de signe pour une valeur de x comprise entre ξ' et b.

Ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{lllll}
 & \text{Pour } x = \xi' \ldots\ldots\ldots & b & & \\
\text{on a} & V(x,\mu)\ \ -\ \mathrm{o} & + & \Big\} & \text{quand, pour } x=\xi \text{ et } m=\mu', \\
 & V(x,\mu')\ \ \mathrm{o} +++++ & + & & \dfrac{dV}{dx} \text{ et } \dfrac{\delta V}{\delta m} \text{ ont le signe } +,
\end{array}$$

ou bien,

$$\left.\begin{array}{lll}
V(x,\mu) & +\ \mathrm{o} & - \\
V(x,\mu') & \mathrm{o}\ - - - & -
\end{array}\right\} \text{quand } \frac{dV}{dx} \text{ et } \frac{\delta V}{\delta m} \text{ ont le signe } -.$$

On a supposé ici $\xi' < X$. Il n'y a pas lieu de s'occuper du cas où l'on aurait $\xi' = X$, c'est-à-dire $V(X, \mu') = 0$, puisqu'on ne fait pas croître x au-delà de X.

IX.

Il est donc prouvé qu'à chaque valeur ξ de x qui annulle $V(x, \mu)$, valeur qui peut être inférieure ou égale à X, correspond une valeur de x un peu moindre que ξ qui annulle $V(x, \mu')$, *et vice versâ ;* qu'à chaque valeur ξ' de x moindre que X qui annulle $V(x, \mu')$ correspond une valeur de x un peu plus grande que ξ' qui annulle $V(x, \mu)$. On déduit de là les conséquences suivantes, en supposant que les deux fonctions $V(x, \mu)$ et $V(x, \mu')$ aient pour $x = \mathrm{x}$ des valeurs différentes de zéro et de même signe, outre la condition admise n° VI, que la valeur de $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ diminue quand m croît depuis μ jusqu'à μ'.

Si $V(x, \mu)$ et $V(x, \mu')$ ont toutes deux des valeurs différentes de zéro pour $x = X$, la fonction $V(x, \mu')$ s'évanouit et change de signe précisément le même nombre de fois que $V(x, \mu)$ entre les limites x et X, et pour des valeurs de x un peu plus petites que celles qui annullent $V(x, \mu)$.

Si $V(x, \mu)$ est nulle pour $x = X$, $V(x, \mu')$ s'évanouit encore autant de fois que $V(x, \mu)$ pour des valeurs de x un peu moindres que celles qui annullent $V(x, \mu)$, y compris X. Mais entre les limites x et X, $V(x, \mu')$ change de signe une fois de plus que $V(x, \mu)$ et ce changement de signe excédant de $V(x, \mu')$ a lieu pour une valeur de x un peu moindre que X. Car, d'après ce qu'on a démontré n° VIII, si l'on donne à x une valeur a moindre que X, telle que $V(x, \mu)$ conserve constamment le même signe dans l'intervalle de a à X, $V(x, \mu')$ changera de signe en s'évanouissant une seule fois, avant que x atteigne la limite X pour laquelle on a $V(X, \mu) = 0$.

Enfin, si $V(x, \mu')$ est nulle pour $x = X$, $V(x, \mu)$ s'évanouit une fois de moins que $V(x, \mu')$, mais elle change de signe le même nombre de fois, tandis que x croît depuis x jusqu'à X. En effet, si l'on désigne par a une valeur de x moindre que X, telle que $V(x, \mu')$ ne change pas de signe dans l'intervalle de a à X, la fonction $V(x, \mu)$ aura pour $x = a$ le même signe que $V(x, \mu')$ et conservera ce même signe pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à X inclusivement, puisque si elle s'annullait pour une valeur ξ de x comprise entre a et X ou même pour $x = X$, $V(x, \mu')$ devrait s'évanouir aussi et changer de signe pour une valeur de x un peu moindre que ξ ou que X dans l'intervalle de a à X, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est aisé de voir qu'on arriverait aux mêmes conséquences, si la limite X au lieu d'être constante augmentait insensiblement, tandis que m passerait de la valeur μ à la valeur μ'.

X.

On voit par là comment le nombre des changements de signe de la fonction $V(x, m)$ entre les limites x et X pour chaque valeur attribuée à m, peut s'altérer quand on fait passer m par degrés insensibles d'une valeur quelconque à une autre plus grande. On admet que tandis que m augmente, la fonction $V(x, m)$ ne change pas de signe pour $x = \text{x}$, et que de plus, comme on l'a dit n° VI, la valeur de $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \text{x}$ diminue ou demeure constante.

Si l'on fait croître m à partir d'une valeur quelconque m', tant que la fonction $V(x, m)$ ne s'évanouira pas pour $x = X$, cette fonction aura toujours, entre les limites x et X, le même nombre de changements de signe qu'elle a d'abord pour $m = m'$, et les différentes valeurs de x qui l'annullent diminueront par degrés insensibles.

Quand m atteindra une valeur pour laquelle $V(X, m)$ s'évanouira, la fonction $V(x, m)$ aura encore pour cette valeur de m le même nombre de changements de signe qu'elle avait pour les valeurs précédentes de m et pour $m = m'$. Mais dès que m dépassera la valeur dont il s'agit, $V(x, m)$ acquerra un nouveau changement de signe en s'évanouissant près de la limite X; et en général le nombre des changements de signe de $V(x, m)$ entre x et X augmentera toujours d'une unité, chaque fois que m en croissant dépassera une nouvelle valeur qui annullera $V(X, m)$.

En conséquence, si m croît depuis une valeur quelconque m' jusqu'à une autre valeur plus grande m'', autant il y aura de valeurs de m entre m' et m'' qui annulleront $V(X, m)$, autant la fonction $V(x, m'')$ aura de changements de signe de plus que $V(x, m')$ entre les limites x et X; et les valeurs de x qui annulleront $V(x, m')$ seront respectivement plus grandes que celles de même rang à partir de x qui annulleront $V(x, m'')$.

On peut rendre cette proposition plus sensible en considérant comme au n° VII la courbe, lieu des points pour lesquels on a $V(x,m)=0$ entre les limites x et X; cette courbe est composée de plusieurs branches qui en s'éloignant de l'axe des x se portent toujours vers la gauche du côté des x négatives. (*Voyez* la figure placée à la fin du n° VII.)

Nous désignerons dorénavant par Δ la différence entre les nombres de changements de signe des deux fonctions $V(x, m')$ et $V(x, m'')$.

Il ne faut pas oublier que $V(x, m')$ aussi bien que $V(x, m'')$ change de signe pour chaque valeur de x qui l'annulle, et que $V(X, m)$ change aussi de signe pour chaque valeur de m qui l'annulle; ce qui résulte de ce que ni $\frac{dV}{dx}$ ni $\frac{\partial V}{\partial m}$ ne peut s'évanouir en même temps que V, à cause de l'équation (4).

On peut dire en d'autres termes que les équations $V(x, m') = 0$, $V(x, m'') = 0$, $V(X, m) = 0$, n'ont point de racines égales.

XI.

Maintenant on remarquera qu'il est permis de regarder la fonction $G(x, m')$ comme une fonction de x tout-à-fait arbitraire, et $G(x, m'')$ comme une autre fonction de x également arbitraire, pourvu qu'elle soit pour chaque valeur de x plus grande que la première fonction $G(x, m')$ ou au moins égale à $G(x, m')$.

En effet, si l'on se donne à volonté entre les limites x et X deux fonctions G' et G'', telles que pour chaque valeur de x, G'' soit toujours plus grande que G', ou au moins égale à G', on pourra toujours concevoir une troisième fonction $G(x, m)$ contenant avec x un paramètre indéterminé m, qui devienne le même que G', quand on attribuera à m la valeur particulière m', la même que G'' quand on fera $m=m''$, et qui en outre pour une valeur quelconque de x croisse par degrés insensibles ou du moins ne décroisse pas, lorsqu'on fera croître m d'une manière continue depuis m' jusqu'à m''. Il y aura toujours une infinité de fonctions $G(x, m)$ qui rempliront ces conditions.

La détermination d'une telle fonction $G(x, m)$ revient à celle d'une surface assujettie d'abord à passer par deux courbes données dans deux plans parallèles au plan xz et représentées la première par les équations $y=m'$, $z=G'$, la seconde par les équations $y=m''$, $z=G''$, et qui soit telle que dans chacune de ses sections parallèles au plan yz à la distance x, les ordonnées $z=G(x, m)$ croissent toujours en même temps que $y=m$, depuis G' jusqu'à G'', ou du moins ne décroissent pas. Quand pour une valeur de x particulière, G' et G'' auront la même valeur, G aura aussi nécessairement cette même valeur.

Parmi toutes les surfaces en nombre infini qui rempliront les conditions prescrites, on peut donner pour exemple, la surface gauche engendrée par une ligne droite indéfinie qui se meut en demeurant parallèle au plan yz et glissant sur les deux courbes données.

Les deux fonctions $K(x, m')$ et $K(x, m'')$ peuvent de même être remplacées par deux fonctions arbitraires de x, K' et K'', pourvu que K' et K'' soient positives entre les limites x et X, et que pour une même valeur quelconque de x, K'' ait toujours une valeur inférieure ou tout au plus égale à celle de K'; K' et K'' ne peuvent être nulles que pour $x = \mathrm{x}$; pour toute autre valeur de x, K' et K'' doivent avoir des valeurs plus grandes que o.

Cela posé, le théorème auquel nous sommes parvenus à la fin du n° X deviendra celui que nous allons énoncer.

XII.

Théorème. Soient les deux équations différentielles

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}'\,\mathrm{V}' = 0,$$

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}''\,\mathrm{V}'' = 0,$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux limites x et X et pour lesquelles on admet les conditions suivantes :

G' est une fonction arbitraire de x donnée entre les limites x et X; G'' est une autre fonction de x assujettie à la seule condition d'avoir pour chaque valeur de x une valeur supérieure ou au moins égale à celle de G'. Les deux fonctions K' et K'' sont positives pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X (*). En outre, pour chaque valeur de x, K'' doit être inférieure ou au plus égale à K'. On suppose encore que la valeur du rapport $\dfrac{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}}{\mathrm{V}''}$ pour $x = \mathrm{x}$ ne soit pas plus grande que celle de $\dfrac{\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}}{\mathrm{V}'}$.

(*) K' aussi bien que K'' peut être nulle pour $x = \mathrm{x}$, pourvu qu'on ait en même temps

$$\frac{d\mathrm{K}'}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + \mathrm{G}'\mathrm{V}' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathrm{K}''}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + \mathrm{G}''\mathrm{V}'' = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

selon la remarque qui termine le n° I.

Ces conditions

$$G'' \geqq G', \qquad K'' \leqq K',$$

et

$$\frac{K'' \frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{K' \frac{dV'}{dx}}{V'}, \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

étant admises, la fonction V'' s'évanouira et changera de signe autant de fois ou plus de fois que V' entre les limites x et X; et si l'on considère par ordre de grandeur à partir de x les différentes valeurs de x qui annullent V' et V'', les valeurs de x qui annullent V' seront respectivement plus grandes que celles de même rang qui annullent V''.

Concevons une nouvelle fonction G ou G (x, m) contenant avec x un paramètre indéterminé m, qui devienne la même que G' quand on attribue à m une valeur particulière m', la même que G'' quand on fait $m = m''$, et dont les valeurs successives correspondantes à une même valeur quelconque de x, croissent d'une manière continue ou du moins ne décroissent pas, quand on fait croître m depuis m' jusqu'à m''. Il y aura toujours une infinité de fonctions G (x, m) qui rempliront ces conditions. Soit de même K ou K (x, m) une autre fonction de x et de m qui devienne égale à K' pour $m = m'$, à K'' pour $m = m''$, et qui décroisse ou du moins ne croisse pas, quand m croît depuis m' jusqu'à m'', x demeurant constante. Soit une fonction V déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

et supposons que pour chaque valeur de m, V ait toujours pour $x = \mathrm{x}$ un même signe qui soit aussi commun à V' et à V'', et que la valeur du rapport $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$, d'abord égale à celle de $\frac{K' \frac{dV'}{dx}}{V'}$ quand $m = m'$, décroisse quand m augmente ou du moins ne croisse pas, et devienne égale à celle de $\frac{K'' \frac{dV''}{dx}}{V''}$ quand

m devient m''. Cela posé, l'excès Δ du nombre des changements de signe de V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de V', est précisément égal au nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction $V(X, m)$ lorsque m croît depuis m' jusqu'à m''.

D'ailleurs, d'après ce qu'on a dit plus haut, V doit s'évanouir et changer de signe entre les limites x et X au moins autant de fois que V' et au plus autant de fois que V'', et chaque valeur de x qui annulle V est plus petite que la valeur de x de même rang qui annulle V', et plus grande que la valeur de x de même rang qui annulle V''.

Dans la première partie de ce théorème, il n'est pas nécessaire de supposer que les fonctions V' et V'' aient le même signe pour $x = \mathrm{x}$. A la vérité nous avons admis cette hypothèse dans notre démonstration, n^os IX et X. Mais la première partie du théorème a toujours lieu, quand même les valeurs de V' et de V'' pour $x = \mathrm{x}$ sont de signes contraires; car on peut changer le signe de l'une de ces fonctions, par exemple de V', sans qu'elle cesse de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

et à la condition $\dfrac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} \geqq \dfrac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$ pour $x = \mathrm{x}$.

XII *bis*.

On a supposé dans tout ce qui précède, que tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', la fonction $V(x, m)$ conserve toujours le même signe pour $x = \mathrm{x}$ et que d'ailleurs la valeur de $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ diminue ou demeure constante. Mais on peut supposer encore que cette fonction $V(x, m)$ soit nulle pour $x = \mathrm{x}$ quand $m = m'$, ou quand $m = m''$, ou enfin pour toutes les valeurs de m depuis m' jusqu'à m'', sans qu'elle change de signe. On peut étendre le théorème précédent à ces différents cas particuliers, en ayant égard à l'hypothèse adoptée n° VI sur la valeur de $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}}$ ou de $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$.

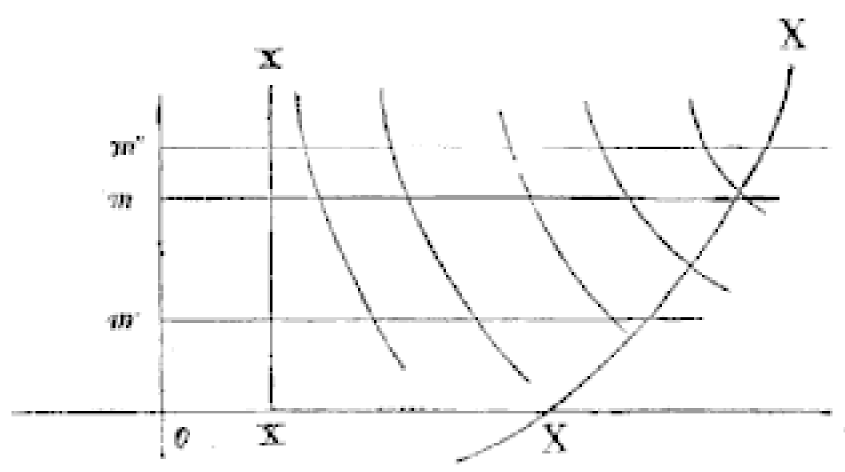
Si l'on suppose $V(x, m')$ ou $V' = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, le théorème qui vient d'être énoncé aura toujours lieu, pourvu que l'on considère le rapport $\dfrac{K'\dfrac{dV'}{dx}}{V'}$ comme égal à $+\infty$ pour $x = \mathrm{x}$, et qu'on ne tienne pas compte de la valeur x parmi celles qui annullent V', en les comparant avec celles qui annullent V'' et V. En effet, on a ici $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et $m = m'$; quand m croît au-delà de m', la valeur du rapport $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ doit augmenter, en vertu de l'hypothèse établie n° VI, si V ne demeure pas nulle pour $x = \mathrm{x}$. Donc la valeur de $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$, qui est nulle quand $m = m'$, devient plus grande que zéro, quand m croît au-delà de m'. Alors le rapport inverse $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V}$ a une valeur positive d'autant plus grande que m diffère moins de m'. C'est pourquoi quand $m = m'$, on doit considérer la valeur de $\dfrac{K'\dfrac{dV'}{dx}}{V'}$ pour $x = \mathrm{x}$ comme égale à $+\infty$; en même temps on doit omettre la valeur x parmi celles qui annullent V', puisque quand m augmente, la fonction V n'est plus nulle pour $x = \mathrm{x}$.

Si l'on a $V'' = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, le théorème subsiste encore en supposant $\dfrac{K''\dfrac{dV''}{dx}}{V''} = -\infty$ pour $x = \mathrm{x}$ et en tenant compte de la valeur x parmi celles qui annullent V''. Car quand m est un peu moindre que m'', $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V}$ a pour $x = \mathrm{x}$ une valeur négative d'autant plus considérable que m approche plus de m''; et la fonction V s'évanouit pour une valeur de x un peu plus grande que x, qui diminue jusqu'à devenir égale à x, quand m atteint la valeur m''.

Enfin si l'on a à la fois $V'=0$ et $V''=0$ pour $x=$x, on doit supposer aussi $V=0$ pour $x=$x, pour toutes les valeurs de m entre m' et m'', et il faut alors dans l'énoncé du théorème n'avoir égard qu'aux valeurs de x plus grandes que x qui annullent V', V'' et V. On a constamment, dans ce cas, $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}}=0$ pour $x=$x, quelle que soit m.

La considération de la courbe $V(x, m)=0$ représentée n° VII peut servir à faire comprendre comment le théorème subsiste dans ces cas particuliers, en adoptant les conventions et restrictions énoncées.

On peut donner encore plus d'extension au théorème précédent, en supposant dans son énoncé que la limite X au lieu d'être constante, augmente insensiblement en même temps que m. Cette extension résulte de la remarque qui a été faite à la fin du n° X, et l'on peut s'en rendre compte par l'inspection de la figure ci-jointe.



XIII.

On peut sans altérer les fonctions G et K dans l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0, \qquad (1)$$

faire varier seulement le rapport de V à $K\dfrac{dV}{dx}$ pour $x=$.

La formule (4) se réduit alors à

$$\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(K \frac{dV}{dx} \right) = C.$$

La constante C est égale à la valeur arbitraire du premier membre pour $x = \mathrm{x}$, et prendre cette constante positive, c'est supposer que la valeur du rapport $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$, que nous désignerons par h, diminue, quand m augmente. La démonstration précédente comprend ce cas particulier dans lequel les variations δG et δK sont nulles. On en conclut que lorsque h diminue, les valeurs de x qui annullent V diminuent par degrés insensibles, et conséquemment, si h augmente, ces mêmes valeurs augmentent.

Désignons par V_1 et V_2 deux fonctions qui substituées à la place de V satisfassent à l'équation (I) et en outre aux conditions

$$V_1 = 0, \ \frac{dV_1}{dx} = 1, \ V_2 = 1, \ \frac{dV_2}{dx} = 0, \text{ pour } x = \mathrm{x}:$$

la valeur générale de V sera

$$V = AV_1 + BV_2,$$

A et B étant des constantes arbitraires; V_2 est une valeur particulière de V qui satisfait à l'équation (I) et correspond à l'hypothèse de $h = 0$. V_1 est de même une valeur de V en supposant $h = \pm \infty$.

Cela posé, on a la proposition suivante : Si l'on fait croître la valeur du rapport $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ par degrés insensibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, chaque valeur de x qui annulle V augmente continuellement, en passant par toutes les grandeurs comprises entre deux valeurs consécutives qui annullent V_1; quand h est égale à zéro, on a les valeurs de x qui annullent V_2.

Il suit de là que deux valeurs de x qui annullent V_1 comprennent toujours entre elles une valeur de x qui annulle V et n'en comprennent qu'une : elles comprennent aussi une valeur de x qui annulle V_2 et n'en comprennent qu'une; et cette valeur de x qui annulle V est plus petite ou plus grande que celle de même rang qui annulle V_2, selon que la valeur h de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=\mathrm{x}$ est négative ou positive.

XIV.

La proposition précédente admet une autre démonstration fort simple.

Soient les deux équations

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0,$$

$$\frac{d.\left(K\frac{dV'}{dx}\right)}{dx}+GV'=0.$$

On en tire, comme au n° II,

$$K\left(V\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV}{dx}\right)=C. \qquad (10)$$

La constante C est égale à la valeur arbitraire de l'expression $K\left(V\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV}{dx}\right)$ pour $x=\mathrm{x}$. Cette constante C sera positive si l'on a $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}<\frac{K\frac{dV'}{dx}}{V'}$ pour $x=\mathrm{x}$, V et V' ayant d'ailleurs pour $x=\mathrm{x}$ des valeurs de même signe qu'on peut rendre positives.

Cela posé, soient α et β deux valeurs de x consécutives qui annullent V'. Il résulte de l'équation (10), comme on l'a déjà vu n° II, que pour ces valeurs de x, $\frac{dV'}{dx}$ ne peut pas être nulle en même temps que V', et il est aisé de voir que $\frac{dV'}{dx}$ aura des valeurs de signes contraires pour $x=\alpha$ et pour $x=\beta$. En effet, pour les valeurs de x un peu plus grandes que α, V' et $\frac{dV'}{dx}$ ont un même signe qui est celui de $\frac{dV'}{dx}$ pour $x=\alpha$, tandis que pour les valeurs de x un peu plus petites que β, V' a un signe contraire à celui de $\frac{dV'}{dx}$ pour $x=\beta$. Mais V' a un même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β : donc $\frac{dV'}{dx}$ a pour $x=\beta$, un signe contraire à celui qu'elle a pour $x=\alpha$.

Maintenant l'équation (10) où C est positive, fait voir que, toutes les fois que V' est nulle, V a le même signe que $\frac{dV'}{dx}$. Conséquemment V a pour $x=\alpha$ et pour $x=\beta$ deux valeurs de signes contraires; V s'évanouit donc au moins une fois pour une valeur de x comprise entre α et β.

On reconnaîtra de la même manière que deux valeurs de x consécutives qui annullent V doivent comprendre au moins une valeur de x qui annulle V'.

Donc ces deux fonctions V, V' s'évanouiront pour des valeurs croissantes de x, l'une après l'autre alternativement. V s'évanouira la première. Car si l'on suppose que α soit la plus petite valeur de x qui annulle V', les valeurs de V et de V' pour $x=\mathrm{x}$ étant toujours censées positives, la valeur de $\frac{dV'}{dx}$ pour $x=\alpha$ sera négative, puisque V' doit en s'évanouissant pour $x=\alpha$ passer du positif au négatif; V sera donc aussi négative pour $x=\alpha$, d'après l'équation (10); mais elle est positive pour $x=\mathrm{x}$; donc V change de signe et s'annulle pour une valeur de x plus petite que α, c'est-à-dire que V s'annulle avant V'.

Il suit de là que si l'on attribue au rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$, pour $x=X$, des valeurs h de plus en plus petites, les différentes valeurs de x qui annullent V diminueront progressivement : on est ainsi ramené à la proposition du numéro précédent.

XV.

Jusqu'ici l'on s'est donné à volonté la valeur du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour

$x = \mathrm{x}$ et l'on a supposé cette valeur décroissante ou invariable, tandis que le paramètre m augmentait; mais on peut aussi se donner la valeur de $\dfrac{\mathrm{K}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}}$ pour $x = \mathrm{X}$ et la faire varier avec m, en conservant d'ailleurs les autres conditions relatives aux fonctions G, K, G', etc. On ramenera ce cas au précédent, en faisant la variable $x = a - z$, a étant une constante, et considérant toutes les quantités G, K, V, G', etc., qui étaient jusqu'à présent fonctions de x, comme fonctions de la nouvelle variable z qui augmente quand x diminue. La proposition du n° XII deviendra par cette inversion celle que nous allons énoncer et qu'on peut aussi établir directement à l'aide de la formule (5) de la même manière qu'on a démontré celle du n° XII, en s'appuyant sur la formule (4).

Soient les deux équations différentielles

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}'\dfrac{d\mathrm{V}'}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}'\mathrm{V}' + \mathrm{o},$$

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}''\dfrac{d\mathrm{V}''}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}''\mathrm{V}'' = \mathrm{o},$$

dans lesquelles les fonctions G', K', G'', K'' remplissent les conditions énoncées n° XII. Si l'on a

$$\frac{\mathrm{K}''\dfrac{d\mathrm{V}''}{dx}}{\mathrm{V}''} \geqq \frac{\mathrm{K}'\dfrac{d\mathrm{V}'}{dx}}{\mathrm{V}'} \quad \text{pour } x = \mathrm{X},$$

la fonction V'' doit s'évanouir autant de fois ou plus de fois que V' entre les limites x et X, et si l'on considère x comme décroissante à partir de X, les valeurs de x qui annullent V' sont respectivement plus petites que celles de même rang à partir de X qui annullent V''.

Soit encore une fonction V telle que

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{GV} = \mathrm{o},$$

G et K étant des fonctions de x et de m qui remplissent les conditions énoncées n° XII. Supposons que tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', V ait constamment pour $x=\mathrm{X}$ un même signe qui soit aussi commun à V' et à V'', et que la valeur de $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}}$ pour $x=\mathrm{X}$ d'abord égale à celle de $\frac{\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}}{\mathrm{V}'}$ quand $m=m'$, croisse avec m ou du moins ne décroisse pas et devienne égale à celle de $\frac{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}}{\mathrm{V}''}$, quand m devient m''. Cela posé, l'excès du nombre des changements de signe de V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de V' est égal au nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction V(x, m), lorsque m croît depuis m' jusqu'à m''.

Si l'on suppose $\mathrm{V}'=0$ pour $x=\mathrm{X}$, ce théorème aura encore lieu pourvu que l'on considère $\frac{\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}}{\mathrm{V}'}$ comme égal à $-\infty$ pour $x=\mathrm{X}$, et qu'on ne tienne pas compte de la valeur X parmi celles qui annullent V'.

Si l'on a $\mathrm{V}''=0$ pour $x=\mathrm{X}$, il faut supposer $\frac{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}}{\mathrm{V}''}=+\infty$ pour $x=\mathrm{X}$, et tenir compte de la valeur X parmi celles qui annullent V''.

Enfin, si l'on a à la fois $\mathrm{V}'=0$ et $\mathrm{V}''=0$ pour $x=\mathrm{X}$, on doit aussi avoir constamment $\mathrm{V}=0$ pour $x=\mathrm{X}$, en faisant varier m; et dans ce cas, il faut ne considérer que les valeurs de x plus petites que X qui annullent V', V'' et V.

Si l'on se borne à faire croître par degrés insensibles la valeur du rapport $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}}$ pour $x=\mathrm{X}$, sans altérer les fonctions G et K dans l'équation $\frac{d.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx}+\mathrm{GV}=0$, on voit que les valeurs de x qui annullent V augmenteront toutes à la fois. Cette proposition particulière, à laquelle nous pourrions donner plus de développement, correspond à celle du n° XIII.

XVI.

Les propositions énoncées dans les n$^{\text{os}}$ XII et XV vont nous donner de nouvelles propriétés des fonctions qui nous occupent.

Soient encore les deux équations différentielles

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)}{dx} + G''V'' = 0,$$

où l'on suppose toujours

$$G'' \overset{>}{=} G', \quad K'' \overset{<}{=} K'.$$

Quelles que soient les valeurs des rapports $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$, $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$, *deux valeurs de x consécutives qui annullent V′ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle V″.*

En effet, soient α et β deux valeurs de x qui annullent V', et supposons qu'aucune autre valeur de x comprise entre α et β n'annulle V'. Si V'' n'est pas nulle pour $x=\alpha$, le rapport $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$ aura pour $x = \alpha$ une valeur finie plus petite que celle de $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ pour $x = \alpha$, qui doit être considérée comme égale à $+\infty$, d'après la remarque faite au n° XII *bis*. (On peut dire aussi qu'on a $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} = +\infty$ pour $x = \alpha$, parce que $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ a des valeurs positives très grandes pour les valeurs de x un peu plus grandes que α.)

Alors, d'après le théorème du n° XII, si l'on fait croître x depuis α jusqu'à $\mathfrak{C}$, la fonction V″ s'évanouira nécessairement au moins une fois pour une valeur de x plus petite que la valeur $\mathfrak{C}$ qui annulle V′.

Il en sera de même, si V″ est nulle pour $x = \alpha$ en même temps que V′.

On tirerait aussi la même conclusion du n° XV, en faisant décroître x depuis $\mathfrak{C}$ jusqu'à α, et considérant $\dfrac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ comme égal à $-\infty$ pour $x = \mathfrak{C}$.

Deux valeurs de x consécutives qui annullent V″ *ne peuvent pas comprendre plus d'une valeur de x qui annulle* V′. Car s'il y avait entre elles deux valeurs de x annullant V′, celles-ci comprendraient une nouvelle valeur de x qui annullerait V″ et qui tomberait entre les deux que l'on considère, ce qui serait contraire à l'hypothèse. Cette proposition subsiste dans le cas même où l'une des deux valeurs de x qui annullent V″ annullerait aussi V′. Il ne peut pas entre ces deux valeurs de x en exister d'autre qui annulle V′.

XVII.

Ces propositions ont lieu, quelles que soient les valeurs des rapports $\dfrac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$, $\dfrac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$. Maintenant, admettons comme dans les n^os XII et XV, qu'on ait à la fois

$$\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

$$\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} \geqq \frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

Alors V″ s'évanouira au moins une fois pour une valeur de x moindre que la plus petite valeur de x au-dessus de x qui annulle V′, et aussi pour une valeur de x plus grande que la plus grande valeur de x au-dessous de X qui annulle V′.

On est ramené par là à conclure, conformément à la première partie du théorème du n° XII, que tandis que x croît depuis la limite x jusqu'à une valeur quelconque a, V'' s'évanouit et change de signe entre les limites x et a au moins autant de fois que V' et pour des valeurs de x respectivement moindres que celles de même rang qui annullent V'. Car tandis que x croît depuis x jusqu'à a, V'' s'évanouit au moins une fois avant que x atteigne la plus petite valeur qui annulle V', et d'ailleurs il y a toujours entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V' au moins une valeur qui annulle V''.

De même, tandis que x croît depuis une valeur b jusqu'à X, V'' s'évanouit entre les limites b et X au moins autant de fois que V', et pour des valeurs de x respectivement plus grandes que celles du même rang à partir de X qui annullent V'. Car V'' s'évanouit pour une valeur de x qui surpasse la plus grande de celles qui annullent V', et d'ailleurs deux valeurs de x consécutives qui annullent V' comprennent au moins une valeur de x qui annulle V''. Cette proposition a été déjà énoncée dans la première partie du n° XV.

Si l'on considère par ordre de grandeur à partir de x les différentes valeurs de x qui annullent V' et V'', *la $n^{ième}$ valeur de x à partir de* x *qui annulle V' sera plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle V'' et plus petite que la valeur de x qui annulle V'' d'un rang marqué par $n+\Delta$*, Δ désignant comme précédemment l'excès du nombre des changements de signe de V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de V'. En effet, la $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle V' est plus grande que la valeur de x de même rang qui annulle V'', d'après le n° XII, et d'un autre côté, cette valeur de x qui annulle V' est, d'après le n° XV, plus petite que la valeur de x de même rang à partir de X qui annulle V'', valeur dont le rang à partir de x est marqué par $n+\Delta$.

En particulier, *si* $\Delta = 1$, c'est-à-dire *si V'' ne s'annulle qu'une fois de plus que V' entre les limites* x *et* X, *chaque valeur de x qui annulle V' tombe entre la valeur de x de même rang, à partir de* x *qui annulle V'' et la valeur de x immédiatement supérieure qui annulle aussi V'', de sorte que les deux fonctions V'' et V' s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis* x *jusqu'à* X.

On peut aussi le conclure de ce que deux valeurs de x consécutives qui annullent V' doivent comprendre au moins une valeur de x qui annulle V'', n° XVI, et de ce qu'il y a au moins une valeur de x qui annulle V'' entre x et la plus petite valeur de x qui annulle V', comme aussi entre X et la plus grande valeur de x qui annulle V'.

Si l'on a $V'=0$ ou $V''=0$ pour $x=\mathrm{x}$ ou pour $x=X$, ou si l'on a à la fois $V'=0$ et $V''=0$ pour $x=\mathrm{x}$ ou pour $x=X$, les propositions précédentes subsisteront, pourvu qu'on ait égard aux observations faites dans les n^{os} XII *bis* et XV.

XVIII.

Considérons deux valeurs de x quelconques, a et b, entre x et X (a pouvant être égale à x ou b à X). V'' *ne peut s'évanouir entre les limites a et b qu'une fois de moins que* V'. Car entre deux valeurs de x qui annullent V', il y a toujours au moins une valeur de x qui annulle V''.

V'' *s'évanouit entre les limites a et b au plus Δ fois de plus que* V': car V'' s'évanouit au moins autant de fois que V' soit entre les limites x et a, soit entre b et X.

Il suit de là *qu'entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent V', il ne peut exister plus de Δ valeurs de x qui annullent* V''.

Il peut arriver que V'' soit nulle en même temps que V' pour $x=\alpha$: dans ce cas particulier, V'' s'évanouit au moins une fois de plus que V', tandis que x croît depuis x jusqu'au-delà de α, et au moins autant de fois que V', tandis que x croît depuis une valeur un peu moindre que β jusqu'à X. Donc V'' s'évanouit au plus $\Delta-1$ fois entre α et β, sans compter son évanouissement pour $x=\alpha$.

On voit de même que si V'' était nulle pour $x=\beta$ en même temps que V', sans l'être pour $x=\alpha$, V'' s'évanouirait encore au plus $\Delta-1$ fois entre α et β. Enfin, si V'' était nulle en même temps que V' pour les deux valeurs α et β, il y aurait au plus $\Delta-2$ valeurs de x entre α et β qui annulleraient V''.

XIX.

En adoptant les hypothèses énoncées n° VI, on a reconnu que la valeur de la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour chaque valeur de x diminue quand

m augmente, aussi long-temps que V ne s'évanouit pas. Il en sera de même de l'expression $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + H$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$, si l'on désigne par H une quantité constante ou une fonction de m qui décroisse aussi continuellement quand m augmente. Faisons $x = X$ dans cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ qui ne contiendra plus alors d'autre variable que m, et considérons les changements de signe qu'elle pourra éprouver par la variation de m.

Cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$, où l'on fait $x = X$, ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie. Lorsqu'elle devient nulle, on a $K\frac{dV}{dx} + HV = 0$, et l'on ne peut pas avoir en même temps $V = 0$, car alors on aurait à la fois $V = 0$ et $\frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = X$, ce qui est impossible. Puisque la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ a la propriété de décroître continuellement tandis que m augmente, elle passe en s'évanouissant du positif au négatif; ensuite m continuant à croître, elle décroît indéfiniment en prenant des valeurs négatives de plus en plus éloignées de o, jusqu'à ce que V devienne nulle à son tour.

Quand V s'annulle pour une valeur de m, on a vu plus haut, n^{os} VII et VIII, que, pour les valeurs de m un peu plus grandes que celle-là, V a le signe de $\frac{dV}{dx}$, et pour les valeurs de m un peu plus petites le signe contraire; ce qu'on peut aussi conclure de ce que $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ augmente en même temps que m. Donc, quand V s'annulle, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ change de signe en passant de l'infini négatif à l'infini positif ; m continuant à croître, cette fonction recommence à décroître, en prenant des valeurs positives de plus en plus petites, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse derechef pour une nouvelle valeur de m; en s'évanouissant, elle passera du positif au négatif, puis continuera à décroître jusqu'à l'infini négatif qu'elle atteindra par un nouvel évanouissement de V ; de sorte qu'en général les deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx} + HV$ s'évanouiront toujours l'une après l'autre alternativement pour des valeurs croissantes de m.

XX.

De là il est aisé de tirer les conséquences suivantes :

Si la fonction $\dfrac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ où l'on fait toujours $x = X$, a des valeurs positives pour $m = m'$ et pour $m = m''$, m croissant depuis m' jusqu'à m'', elle doit changer de signe un nombre pair de fois, en passant d'abord par zéro, puis par l'infini, et ensuite par zéro et par l'infini alternativement. Le nombre des valeurs de m comprises entre m' et m'' qui annullent $K\frac{dV}{dx} + HV$ est donc égal au nombre de celles qui annullent V ou $V(X, m)$, et par conséquent, n° XII, à l'excès Δ du nombre des changements de signe de $V(x, m'')$ ou V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de $V(x, m')$ ou V'. Ces deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx} + HV$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, quand m croît depuis m' jusqu'à m'', et c'est $K\frac{dV}{dx} + HV$ qui s'évanouit la première.

Si la fonction $\dfrac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ a une valeur négative pour $m = m'$ aussi bien que pour $m = m''$, elle doit encore changer de signe un nombre pair de fois, en passant alternativement par l'infini et par zéro, et d'abord par l'infini. Ainsi, m croissant depuis m' jusqu'à m'', les deux fonctions V et $K^{dx} + HV$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement le même nombre de fois, V étant la première qui s'évanouisse ; et par suite, le nombre des valeurs de m comprises entre m' et m'' qui annullent $K\frac{dV}{dx}+HV$ est égal à l'excès Δ.

Si $\dfrac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ a une valeur positive pour $m=m'$ et une valeur négative pour $m=m''$, elle doit changer de signe un nombre impair de fois, en passant alternativement par zéro et par l'infini, et d'abord par zéro, tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'' : la fonction $K\frac{dV}{dx}+HV$ s'évanouit donc avant V et une fois de plus que V ; le nombre des valeurs de m entre m' et m'' qui annullent $K\frac{dV}{dx}+HV$ est donc égal à $\Delta+1$.

Enfin, si $\dfrac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ a une valeur négative pour $m=m'$ et positive pour $m=m''$, m croissant depuis m' jusqu'à m'', la fonction $K\frac{dV}{dx}+HV$ s'évanouira après V et une fois de moins que V, par conséquent un nombre de fois marqué par $\Delta-1$.

Dans tous les cas, ces deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+HV$ où l'on attribue à x la valeur particulière X, ont une corrélation telle, que deux valeurs de m consécutives qui annullent l'une d'elles comprennent toujours entre elles une valeur de m qui annulle l'autre, et n'en comprennent qu'une.

Soient μ et μ' deux valeurs de m consécutives qui satisfont à l'équation $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ pour $x=X$. Puisqu'elles comprennent entre elles une valeur de m qui annulle $V(X, m)$ et n'en comprennent qu'une, on en conclut, d'après la 2^e^ partie du théorème du n° XII, que la fonction $V(x, \mu')$ s'évanouit et change de signe entre les limites x et X une fois de plus que $V(x, \mu)$.

Nous ajouterons que cette équation $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ ne peut pas avoir de racines égales, car elle est la même que $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H=0$ et l'on ne peut pas avoir en même temps $\frac{\delta}{\delta m}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H\right)=0$, ce qui est le caractère d'une racine multiple, puisque d'après la formule (4), $\delta\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)$ est toujours négative, et que δH est par hypothèse négative ou nulle. On peut voir encore qu'on ne peut pas avoir pour une même valeur de m, $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ et $\frac{\delta}{\delta m}\left(K\frac{dV}{dx}+HV\right)=0$, en observant que la formule (4) donne

$$\delta V.\left(K\frac{dV}{dx}+HV\right)-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}+HV\right)>0 \text{ pour } x=X,$$

pourvu que δH soit négative ou nulle.

On a déjà remarqué, n° X, que les équations $V(X,m)=0$ et $V(x,m')=0$, $V(x,\mu)=0$, etc., n'ont pas non plus de racines égales.

XXI.

Si l'on remplace la quantité H qui est une constante ou une fonction décroissante de m par une autre quantité $H_{\prime}$ aussi constante ou fonction décroissante de m qui pour chaque valeur de m soit plus grande que H, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ aura toujours une valeur inférieure à celle de $\frac{K\frac{dV}{dx}+H_{\prime}V}{V}$ pour chaque valeur de m; et comme ces deux fonctions décroissent en même temps jusqu'à $-\infty$, tandis que m augmente, la seconde s'évanouira nécessairement après la première, si m croît depuis une valeur quelconque qui rende la première positive jusqu'à la valeur immédiatement supérieure qui annulle V.

Conséquemment, lorsque m croît depuis m' jusqu'à m'', ces trois fonctions V, $K\frac{dV}{dx}+HV$ et $K\frac{dV}{dx}+H_{\prime}V$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement dans l'ordre suivant : $K\frac{dV}{dx}+HV$ s'évanouit toujours immédiatement après V, $K\frac{dV}{dx}+H_{,}V$ s'évanouit après $K\frac{dV}{dx}+HV$, et V après $K\frac{dV}{dx}+H_{,}V$.

On voit par là que si l'on fait varier H en lui attribuant successivement des valeurs constantes de plus en plus grandes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ ou en la remplaçant par des fonctions décroissantes de m de plus en plus grandes, les diverses valeurs de m qui annullent $K\frac{dV}{dx}+HV$ augmenteront en passant par toutes les grandeurs comprises entre les valeurs de m consécutives qui annullent $V(X, m)$. On a vu d'ailleurs que les valeurs de x qui annullent la fonction $V(x, m)$ diminuent, quand la valeur attribuée à m dans cette fonction augmente.

Tout ce qui précède s'applique en particulier aux valeurs de m qui donnent $\frac{dV}{dx}=0$ pour $x=X$, puisque la fonction $K\frac{dV}{dx}+HV$ se réduit à $K\frac{dV}{dx}$, quand on fait $H=0$.

XXII.

Nous avons désigné par h la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=x$ et admis que cette valeur h diminue ou reste la même, tandisque m augmente. Si en prenant toujours pour G et K les mêmes fonctions de x et de m, on remplace h par une autre quantité $h_{,}$ constante ou fonction décroissante de m, qui pour chaque valeur de m surpasse h d'aussi peu qu'on voudra, on sait d'après le nº VI que la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ augmentera ou que $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ diminuera pour chaque valeur de x et en particulier pour $x=X$. Conséquemment la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ où l'on fait $x=X$, qui conserve la propriété de décroître quand m augmente, s'évanouira pour de nouvelles valeurs de m un peu plus grandes que celles qui l'annullaient d'abord, quand on supposait $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}} = h$ pour $x = \mathrm{x}$.

Pour le voir encore plus clairement, supposons que la fonction $\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}$ où l'on fait $x = \mathrm{X}$, soit nulle pour $m = \mu$, lorsqu'on a $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}} = h$ pour $x = \mathrm{x}$. Alors la fonction $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}} + \mathrm{H}$ ou $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}}{\mathrm{V}}$ où l'on fait $x = \mathrm{X}$, étant nulle pour $m = \mu$ et décroissant quand m augmente, est négative pour les valeurs de m plus grandes que μ jusqu'à celle qui annulle $\mathrm{V}(\mathrm{X}, m)$.

Faisons maintenant $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}} = h_{,}$ pour $x = \mathrm{x}$, $h_{,}$ surpassant h d'une quantité aussi petite qu'on voudra; la fonction $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}}{\mathrm{V}}$, où l'on fait $x = \mathrm{X}$, deviendra plus grande qu'elle n'était avant le changement de h en $h_{,}$; or elle était nulle pour $m = \mu$ et négative pour $m > \mu$; donc après la substitution de $h_{,}$ à la place de h, cette fonction sera positive pour $m = \mu$ et aussi pour des valeurs de m un peu plus grandes que μ; mais m continuant à croître, cette fonction reprendra le signe — qu'elle avait d'abord, puisque son augmentation due au changement de h en $h_{,}$ est aussi petite qu'on le veut, en prenant $h_{,}$ très peu différente de h. Ainsi les valeurs de m qui annullent la fonction $\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}$ où l'on fait $x = \mathrm{X}$, augmentent quand on remplace h par $h_{,}$, c'est-à-dire quand la valeur de $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient plus grande. Si au contraire elle devient plus petite (ou si l'on remplace $h_{,}$ par h), on prouvera pareillement que chaque valeur de m qui annulle la fonction $\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}$ où l'on fait $x = \mathrm{X}$, devient plus petite.

On reconnait de la même manière que les valeurs de m qui annullent $V(X, m)$ augmentent ou diminuent toutes à la fois, selon que la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient plus grande ou plus petite, en considérant qu'alors celle de $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ pour $x = X$ diminue ou augmente.

Ainsi, lorsqu'on fait varier la valeur h du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$, soit en lui attribuant des valeurs constantes de plus en plus grandes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, soit en prenant pour h des fonctions décroissantes de m de plus en plus grandes, sans changer les fonctions G et K, les valeurs de m qui satisfont soit à l'équation $K\frac{dV}{dx} + HV =$ pour $x = X$, soit à l'équation $V(X, m) = 0$, augmentent toutes à la fois.

Les valeurs de m qui satisfont aux deux équations

$$K\frac{dV}{dx} - hV = 0, \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

et

$$K\frac{dV}{dx} + HV = 0, \text{ pour } x = X.$$

augmentent donc en même temps que les quantités h et H, dont chacune est une constante ou une fonction décroissante de m.

XXIII.

Supposons que dans l'équation (I)

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

on remplace la fonction de x et de m que G représente par une autre fonction $G_{\prime}$ de x et de m, qui pour chaque valeur de x et de m surpasse G d'une quantité aussi petite qu'on voudra. On peut concevoir, si l'on veut, que G dépende non-seulement de x et de m, mais encore d'un autre paramètre indéterminé n, et qu'en faisant croître celui-ci, G augmente et devienne G_1. Remplaçons aussi K par une autre fonction K_1 de x et de m qui soit moindre que K d'une quantité aussi petite qu'on voudra ; on peut encore considérer K comme fonction du nouveau paramètre n, et admettre que K devient plus petite et se change en K_1 par l'augmentation de n. L'équation (I) deviendra

$$\frac{d.\left(K_1\frac{dV_1}{dx}\right)}{dx} + G_1V_1 = 0,$$

Supposons enfin qu'on ait $\dfrac{K_1\frac{dV_1}{dx}}{V_1} =$ ou un peu $< \dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$, quelle que soit m, et que d'ailleurs chacun de ces rapports diminue ou demeure constant, quand m augmente.

Cela posé, on conclut du théorème du n° XII, en y remplaçant m par n, que la nouvelle fonction V_1 doit s'évanouir entre les limites x et X autant de fois ou plus de fois que V, et que chaque valeur de x qui annulle V_1 est plus petite que la valeur de x de même rang à partir de x qui annulle V. En outre on aura d'après le n° VI pour toute valeur de x plus grande que x

$$\frac{K_1\frac{dV'}{dx}}{V} < \frac{K\frac{dV}{dx}}{V} \text{ ou } \frac{V_1}{K_1\frac{dV_1}{dx}} > \frac{V}{K\frac{dV}{dx}}.$$

Conséquemment en faisant $x = \mathrm{X}$, on aura pour chaque valeur de m

$$\frac{K_1\frac{dV_1}{dx} + HV_1}{V_1} < \frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V},$$

et comme ces deux fonctions décroissent l'une et l'autre quand m augmente, $\dfrac{K_1\frac{dV_1}{dx} + HV_1}{V_1}$, s'évanouira en passant toujours du positif au négatif pour des valeurs de m un peu plus petites que celles qui annullent $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx} + HV}{V}$, c'est-à-dire que les racines m de l'équation $K_1\dfrac{dV_1}{dx} + HV_1 = 0$ sont un peu moindres que celles de l'équation $K\dfrac{dV}{dx} + HV = 0$; proposition qu'on pourrait rendre encore plus évidente par le raisonnement développé dans le numéro précédent.

En considérant qu'on a $\dfrac{V_1}{K_1\dfrac{dV_1}{dx}} > \dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}}$, on reconnaît de même que $V_1(X, m)$ s'évanouira pour des valeurs de m plus petites que celles qui annullent $V(X, m)$ (*).

On voit par tout ce qui précède comment l'augmentation ou la diminution de chacune des quantités H, h, G et K, indépendamment de la variation de m, influe sur les valeurs de x qui annullent $V(x, m)$ entre les limites x et X, et sur les valeurs de m qui satisfont à l'équation $K\dfrac{dV}{dx} + HV = 0$ pour $x = X$.

XXIV.

On a supposé dans tout ce qui précède que H était une quantité constante ou une fonction décroissante de m. Si l'on prend pour H une fonction quelconque de m assujettie à la seule condition de ne pas devenir infinie, la fonction $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V} + H$ ou $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx} + HV}{V}$ où l'on fait $x = X$, pourra

(*) Par exemple, le problème de la distribution de la chaleur dans une sphère homogène conduit à des équations de cette forme

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \left(m + \frac{n}{x^2}\right)V = 0,$$

qu'on intègre en supposant $V = 0$ pour $x = 0$.

D'après ce qui précède les valeurs de m qui satisfont à l'équation $\dfrac{dV}{dx} + HV = 0$, pour $x = X$ ou à l'équation $V(X, m) = 0$, diminuent quand la quantité n augmente, et si n n'admet pas de valeurs positives, les racines m de ces équations sont les plus petites quand $n = 0$.

tantôt croître, tantôt décroître. En désignant par α et β deux valeurs de m consécutives qui annullent $V(X, m)$, cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + H$ aura toujours pour les valeurs de m un peu plus grandes que α des valeurs positives très grandes et pour les valeurs de m un peu plus petites que β des valeurs très grandes, puisque $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ où l'on fait $x = X$ passe de $-\infty$ à $+\infty$, toutes les fois que m atteint et dépasse une valeur qui annulle $V(X, m)$: par conséquent $K\frac{dV}{dx} + HV$ changera de signe en s'évanouissant une fois ou un nombre impair de fois tandis que m croîtra depuis α jusqu'à β; il pourra même arriver que $K\frac{dV}{dx} + HV$ s'évanouisse pour d'autres valeurs de m entre α et β sans changer de signe. On voit aussi que si la quantité $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ est positive pour une certaine valeur de m, $K\frac{dV}{dx} + HV$ devra changer de signe une fois ou un nombre impair de fois tandis que m croîtra depuis cette valeur jusqu'à celle immédiatement supérieure qui annulle $V(X, m)$ et que $K\frac{dV}{dx} + HV$ ne changera pas de signe ou en changera un nombre pair de fois, tandis que m variera depuis la valeur dont il s'agit jusqu'à celle immédiatement inférieure qui annulle $V(X, m)$. D'après cela il est aisé de voir comment on devra modifier les propositions des nos XX...XXIII, en supposant que H soit une fonction quelconque de m, au lieu d'être une constante ou une fonction de m décroissante.

XXV.

Nous avons considéré précédemment les changements de signe qu'éprouve entre les limites x et X la fonction V définie par l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (I)$$

G et K étant des fonctions de x et de m qui satisfont aux conditions énoncées n° XII.

Maintenant nous allons nous occuper de la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$ que nous désignerons par T, p étant une fonction de x ou une constante.

En posant $$T=K\frac{dV}{dx}+pV,$$

on a $$\frac{dT}{dx}=\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+p\frac{dV}{dx}+V\frac{dp}{dx};$$

en remplaçant dans le second membre $\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}$ par la quantité équivalente $-GV$, et $\frac{dV}{dx}$ par $\frac{T-pV}{K}$, on trouvera

$$K\frac{dT}{dx}-pT+\left(GK+p^2-K\frac{dp}{dx}\right)V=0. \qquad (11)$$

La formule

$$T=K\frac{dV}{dx}+pV$$

donne aussi

$$\delta T=\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)+p\delta V,$$

d'où l'on tire

$$T.\delta V-V.\delta T=\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right).$$

En combinant cette dernière formule avec les équations (4) et (5) du n° VI, on aura les suivantes :

$$T\delta V-V\delta T=C+\int_{x}^{x}V^2.\delta G.dx-\int_{x}^{x}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx, \qquad (12)$$

$$T\delta V-V\delta T=C'-\int_{x}^{X}V^2.\delta G.dx+\int_{x}^{X}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx. \qquad (13)$$

Les constantes C et C′ représentent ici les valeurs de $T\delta V-V\delta T$ pour $x=x$ et pour $x=X$.

La formule (12) fait voir qu'on aura, pour chaque valeur de x,

$$T\delta V - V\delta T > 0,$$

si l'on prend C et δG positives ou nulles, et δK négative ou nulle, comme dans le n° VI (δm étant positive). Alors la quantité $\frac{V}{T}$ augmente ou $\frac{T}{V}$ diminue, quand m augmente, car on a

$$T\delta V - V\delta T = T^2.\delta\left(\frac{V}{T}\right) = -V^2.\delta\left(\frac{T}{V}\right).$$

Prendre C positive ou nulle, c'est supposer que la valeur de $\frac{V}{T}$ pour $x = \mathrm{x}$ augmente ou que celle de $\frac{T}{V}$ diminue, quand m augmente, ou que l'une et l'autre demeure constante. Nous admettrons en outre que T ne change pas de signe pour $x = \mathrm{x}$, mais que $V(\mathrm{x}, m)$ peut en changer.

Cela posé, attribuons à m une valeur arbitraire et soit ξ une valeur de x qui annulle T. Comme T représente $K\frac{dV}{dx} + pV$, V ne peut pas être nulle en même temps que T pour $x = \xi$, puisque si V était nulle, on aurait à la fois $V = 0$ et $\frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = \xi$, ce qui est impossible, n° II. On le voit encore par l'équation (12).

L'équation (12) prouve aussi que δT ne peut pas être nulle en même temps que T, puisque alors $T\delta V - V\delta T$ serait nulle, tandis qu'au contraire on a toujours, en vertu de nos hypothèses,

$$T\delta V - V\delta T > 0.$$

A cause de $T = 0$, cette inégalité se réduit à

$$-V\delta T > 0;$$

ainsi quand $T = 0$, δT ou $\frac{\delta T}{\delta m}$ a un signe contraire à celui de V.

D'ailleurs l'équation (11) fait voir que $\frac{dT}{dx}$ sera aussi différente de zéro et d'un signe contraire à celui de V, si l'on a pour chaque valeur de x.

$$GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (14)$$

En admettant cette nouvelle hypothèse, toutes les fois qu'on aura $T = 0$ pour un système de valeurs de x et de m, les deux dérivées $\frac{dT}{dx}$ et $\frac{\delta T}{\delta m}$ auront des valeurs différentes de zéro et de même signe. En conséquence, on pourra appliquer à la fonction T tout ce qu'on a démontré dans les nos VII... XI sur les changements de signe de V, en s'appuyant sur ce que les dérivées $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont des valeurs différentes de zéro et de même signe, toutes les fois que V s'évanouit. Puisque T jouit de la même propriété, on en conclura successivement comme on l'a fait pour V, que T change toujours de signe en s'évanouissant, que les valeurs de x qui annullent T décroissent progressivement quand m augmente, et que si T est nulle pour $x = X$ et pour une valeur particulière de m, T acquiert pour une valeur de m un peu plus grande un nouveau changement de signe près de la limite X.

De là résulte le théorème suivant.

XXVI.

Soient les équations différentielles

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)}{dx} + G''V'' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

dans lesquelles les fonctions G', K', etc. remplissent les conditions énoncées n° XII. Soit p une fonction de x telle qu'on ait pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x et X,

$$
\begin{aligned}
&G'K' + p^2 - K'\frac{dp}{dx} > 0, \\
&G''K'' + p^2 - K''\frac{dp}{dx} > 0, \qquad\qquad (14) \\
&GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0,
\end{aligned}
$$

p pouvant se réduire à une constante.

Si l'on a pour $x = \mathrm{x}$, $\dfrac{V''}{K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''} \overset{>}{=} \dfrac{V'}{K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'}$, la fonction $K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''$ doit s'évanouir et changer de signe autant de fois ou plus que $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$, entre les limites x et X, et chaque valeur de x qui annulle $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$ est plus grande que la valeur de x de même rang à partir de x qui annulle $K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''$.

En outre, si $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ a toujours pour $x = \mathrm{x}$ un signe constant qui soit aussi celui de $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$ et de $K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''$ pour $x = \mathrm{x}$, et si la valeur du rapport $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx} + pV}$ pour $x = \mathrm{x}$, étant d'abord égale à celle de $\dfrac{V'}{K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'}$ quand $m = m'$, augmente ou du moins ne diminue pas quand m augmente, et devient égale à celle de $\dfrac{V''}{K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''}$ quand $m = m''$, l'excès du nombre des changements de signe de $K''\dfrac{dV''}{dx} + p''$ sur le nombre des changements de signe de $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$ entre les limites x et X, est précisément égal au nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ où l'on fait $x = X$, lorsque m croît depuis m' jusqu'à m''.

Remarques. — Quoiqu'on ait supposé pour établir ce théorème que la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$ ne change pas de signe pour $x=\mathrm{x}$, et que par conséquent $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ et $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ ont le même signe pour $x=\mathrm{x}$, cependant la première partie du théorème a lieu, lors même que les valeurs de $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ et de $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ pour $x=\mathrm{x}$ sont de signes contraires. En effet, on a la faculté de changer le signe de la fonction V' par exemple, sans qu'elle cesse de vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx}+G'V'=0,$$

et la condition

$$\frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'}\leqq\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''}\quad\text{pour } x=\mathrm{x}.$$

En changeant le signe de V', celui de $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ est changé en même temps pour chaque valeur de x et en particulier pour $x=\mathrm{x}$. Chacune des fonctions V', V'' et V peut avoir pour $x=0$ une valeur positive, négative ou nulle, indifféremment.

Si l'on a $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ pour $x=\mathrm{x}$, le théorème qui vient d'être énoncé a toujours lieu, pourvu que l'on considère le rapport $\frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'}$ comme égal à $-\infty$ pour $x=\mathrm{x}$ (*) et qu'on ne tienne

---

(*) En effet, on a $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}=0$ pour $x=\mathrm{x}$ et $m=m'$: or quand m augmente, ce rapport $\left(\frac{T}{V}\right)$ doit décroître, et conséquemment devenir négatif : en sorte que $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}+pV}$ a pour $x=\mathrm{x}$ une valeur négative d'autant plus considérable que m diffère moins de m'.

pas compte de la valeur x parmi celles qui annullent $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ en les comparant avec celles qui annullent $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$.

Si l'on a $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=\mathrm{x}$, le théorème subsiste encore en supposant $\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''}=+\infty$ pour $x=\mathrm{x}$ et en tenant compte de la valeur x parmi celles qui annullent $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$.

Enfin si l'on a à la fois $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ et $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=\mathrm{x}$, on doit supposer aussi constamment $K\frac{dV}{dx}+pV=0$ pour $x=\mathrm{x}$, tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', et il faut alors dans l'énoncé du théorème n'avoir égard qu'aux valeurs de x plus grandes que x qui annullent les fonctions $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$, $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et $K\frac{dV}{dx}+pV$.

XXVII.

On peut sans altérer les fonctions G et K dans l'équation... $\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0$, faire varier seulement le rapport de V à $K\frac{dV}{dx}$ pour $x=\mathrm{x}$. En supposant toujours $GK+p^2-K\frac{dp}{dx}>0$, le théorème du n° XXVI se réduit alors au suivant, dans lequel les fonctions V_1 et V_2 sont celles qui ont été définies au n° XIII.

Si l'on fait croître la valeur h de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=\mathrm{x}$ par degrés insensibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, chaque valeur de x qui annulle $K\frac{dV}{dx}+pV$ augmente continuellement en passant par toutes les grandeurs comprises entre deux valeurs de x consécutives qui annullent $K\frac{dV_1}{dx}+pV_1$: quand $h=0$, on a les valeurs de x qui annullent $K\frac{dV_2}{dx}+pV_2$.

XXVIII.

Il est aisé de voir comment on doit modifier le théorème du n° XXVI, si l'on remplace les conditions énoncées pour la limite x par des conditions analogues pour la limite X. Nous ne donnerons ici qu'une partie du nouvel énoncé.

Soient les deux équations différentielles

$$\frac{d\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)}{dx} + G''V'' = 0,$$

et supposons toujours

$$G'' \geqq G', \quad K'' \leqq K',$$

$$G'K' + p^2 - K'\frac{dp}{dx} > 0,$$

$$G''K'' + p^2 - K''\frac{dp}{dx} > 0.$$

Si l'on a

$$\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx} + pV''} \leqq \frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx} + pV'} \text{ pour } x = X,$$

la fonction $K''\frac{dV''}{dx} + pV''$ s'évanouira entre les limites x et X autant de fois ou plus de fois que $K'\frac{dV'}{dx} + pV'$, et pour des valeurs de x respectivement plus grandes que celles de même rang à partir de X qui annullent $K'\frac{dV}{dx} + pV'$.

Si l'on a $K'\frac{dV}{dx} + pV' = 0$ pour $x = X$, cette proposition subsiste pourvu que l'on considère $\frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx} + pV'}$ comme égal à $+\infty$

pour $x = \mathrm{X}$, et qu'on ne tienne pas compte de la valeur X parmi celles qui annullent $\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}'$, en les comparant à celles qui annullent $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''$.

Si l'on a $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}'' = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, il faut regarder $\dfrac{\mathrm{V}''}{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''}$ comme égal à $-\infty$ pour $x = \mathrm{X}$, et compter la valeur X parmi celles qui annullent V''.

Si l'on a en même temps $\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}' = 0$ et $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''$ pour $x = \mathrm{X}$, il faut dans le même énoncé n'avoir égard qu'aux valeurs de x plus petites que X, qui annullent $\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}'$ et $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + \mathrm{V}''$.

XXIX.

Les théorèmes des nos XII et XV sur les changements de signe de V' et de V'', nous ont donné comme corollaires les propriétés développées dans les nos XVI, XVII et XVIII. En appliquant les mêmes raisonnements aux deux fonctions $\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}'$ et $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''$, on déduira des nos XXVI et XXVIII des propriétés de ces fonctions tout-à-fait analogues à celles de V' et de V''. Il suffira de les énoncer.

Quelles que soient les valeurs de $\dfrac{\mathrm{V}'}{\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}'}$ et de $\dfrac{\mathrm{V}''}{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''}$, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$, deux valeurs de x consécutives qui annullent $\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}'$ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''$, et deux valeurs de x consécutives qui annullent $\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + p\mathrm{V}''$ ne peuvent pas comprendre plus d'une valeur de x qui annulle $\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + p\mathrm{V}'$.

Admettons maintenant qu'on ait à la fois

$$\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''} \gtreqless \frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'} \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

$$\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''} \leqq \frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'} \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

Alors la $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$, est plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et plus petite qu'une autre valeur de x qui annulle $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ d'un rang marqué par $n+\varepsilon$ (à partir de x), ε désignant combien de fois $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ s'évanouit de plus que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ entre les limites x et X.

En particulier, si $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire si $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ ne s'annulle qu'une fois de plus que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ entre x et X, chaque valeur de x qui annulle $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ tombe entre la valeur de x de même rang à partir de x qui annulle $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et la valeur de x immédiatement supérieure qui annulle aussi $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$; de sorte que les deux fonctions $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X.

Si l'on prend entre x et X des valeurs a et b, $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ ne peut s'évanouir entre les limites a et b qu'une fois de moins que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$; d'un autre côté $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ s'évanouit entre les limites a et b au plus ε fois de plus que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$. Conséquemment, entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$, il ne peut exister plus de ε valeurs de x qui annullent $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$. Si l'on avait $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$, en même temps que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$, pour

$x=\alpha$ ou pour $x=\mathcal{C}$, $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ s'évanouirait au plus $\varepsilon-1$ fois entre α et $\mathcal{C}$, sans compter son évanouissement pour $x=\alpha$ ou pour $x=\mathcal{C}$. Et si $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ était nulle en même temps que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ pour les deux valeurs α et $\mathcal{C}$, il n'y aurait au plus que $\varepsilon-2$ valeurs de x entre α et $\mathcal{C}$ qui annulleraient $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$.

Si l'on a $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ ou $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=x$ ou pour $x=X$, ou si l'on a à la fois $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ et..... $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=x$ ou pour $x=X$, les propositions précédentes subsisteront, pourvu qu'on ait égard aux remarques qui terminent les nos XXVI et XXVIII.

XXX.

En observant qu'on a

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)=\frac{V.\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}-K\left(\frac{dV}{dx}\right)^2}{V^2},$$

et

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)=\frac{K\left(\frac{dV}{dx}\right)^2-V.\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}}{\left(K\frac{dV}{dx}\right)^2},$$

on peut mettre l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0, \tag{I}$$

sous les deux formes suivantes :

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)+G+\frac{1}{K}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)^2=0,$$

et

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right) = G\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)^2 + \frac{1}{K} \ (*).$$

On voit ici que si la fonction G est positive comme K entre les limites x et X, $\frac{d}{dx}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)$ est constamment négative entre ces limites et $\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)$ positive, et par conséquent en faisant croître x depuis x jusqu'à X, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ diminue continuellement et $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ augmente.

Quand x en croissant atteint une valeur qui annulle V, on a simplement $\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right) = \frac{1}{K}$, d'où l'on conclut que lors même que G

(*) Ainsi en faisant

$$y = \frac{K\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{y} = \frac{V}{K\frac{dV}{dx}},$$

l'equation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (1)$$

se transforme dans les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} + G + \frac{1}{K}y^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = Gz^2 + \frac{1}{K},$$

qu'on peut réciproquement ramener à l'équation (1). Ces dernières renferment comme cas particulier l'équation de *Riccati ;* on peut leur appliquer les transformations dont l'équation (1) est susceptible et qui seront indiquées dans le n° XXXV.

n'est pas positive, $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx}}$ passe toujours du négatif au positif quand V s'évanouit. Cette propriété qu'on a déjà remarquée n° II, n'est pas particulière à la fonction V; car en général, lorsqu'une fonction $f(x)$ d'une variable x s'évanouit, le quotient $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ passe du négatif au positif, $f'(x)$ étant la fonction dérivée de $f(x)$.

Quand $\dfrac{dV}{dx}$ devient nulle pour une valeur de x, $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V}$ passe en s'évanouissant du positif au négatif, si G est positive; donc pour cette valeur de x qui annulle $\dfrac{dV}{dx}$, V a une valeur *maximum* soit positive soit négative, puisque pour les valeurs de x un peu plus grandes que celle-là $\dfrac{dV}{dx}$ prend un signe contraire à celui de V et que pour les valeurs de x un peu moindres, $\dfrac{dV}{dx}$ a le même signe que V, ce qui indique une valeur *maximum* de V. On peut encore le reconnaître en écrivant l'équation (I), ainsi

$$K\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx}+GV=0.$$

G étant positive, on voit que quand on a $\dfrac{dV}{dx}=0$, $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ a un signe contraire à celui de V, ce qui est le caractère d'une valeur *maximum* de V. Cette fonction V ne peut donc point avoir de valeur *minimum*, quand G est positive; elle deviendait *minimum*, si $\dfrac{dV}{dx}$ s'annullait pour une valeur de x qui rendrait G négative.

XXXI.

Désignons par p une quantité constante ou une fonction de x qui décroisse continuellement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X. En supposant toujours G positive, la fonction $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V}+p$ ou $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}+pV}{V}$ doit, d'après ce qui précède, décroître à mesure que x augmente, aussi long-temps que V ne s'évanouit pas. Cette fonction ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie. Elle devient infinie lorsque V s'évanouit; alors elle passe du négatif au positif. Elle devient nulle quand on a $K\frac{dV}{dx}+pV=0$; on ne peut pas avoir en même temps $V=0$, car alors on aurait $V=0$ et $K\frac{dV}{dx}=0$ pour la même valeur de x, ce qui est impossible. Puisque la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ décroît, tandis que x augmente, elle passe quand elle s'évanouit du positif au négatif; puis x continuant à croître, elle décroît indéfiniment en prenant des valeurs négatives de plus en plus considérables, jusqu'à ce que V devienne nulle. Alors $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ devient infinie et change de signe en passant de $-\infty$ à $+\infty$; et x continuant à croître, elle recommence à décroître et prend des valeurs positives de plus en plus petites jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse de nouveau; après quoi elle devient négative jusqu'à ce que V s'annulle: de sorte qu'en général les deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+pV$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement pour des valeurs croissantes de x.

En conséquence, si la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est positive pour $x=\text{x}$ et pour $x=\text{X}$, tandis que x croîtra depuis x jusqu'à X, elle ne pourra changer de signe qu'un nombre pair de fois, en passant d'abord par zéro, puis par l'infini, et ensuite par zéro et par l'infini alternativement. Les deux fonctions $K\frac{dV}{dx}+pV$ et V s'évanouissent donc l'une après l'autre tour à tour un même nombre de fois, et c'est $K\frac{dV}{dx}+pV$ qui s'évanouit la première.

Si $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est négative pour $x=\text{x}$ et pour $x=\text{X}$, les deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+pV$ s'évanouiront encore entre ces limites au même nombre de fois et toujours l'une après l'autre : V s'évanouira la première.

Si $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx} + pV}{V}$ a une valeur positive pour $x = \mathrm{x}$ et négative pour $x = \mathrm{X}$, $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ s'évanouira une fois de plus que V entre les limites x et X ; d'ailleurs ces deux fonctions s'annullent toujours l'une après l'autre alternativement, et c'est $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ qui devient nulle la première.

Enfin, si $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx} + pV}{V}$ est négative pour $x = \mathrm{x}$ et positive pour $x = \mathrm{X}$, $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ s'évanouira une fois de moins que V entre les limites x et X et V deviendra nulle la première.

Dans tous les cas, deux valeurs de x consécutives qui annullent l'une de ces fonctions V et $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ comprennent toujours entre elles une valeur de x qui annulle l'autre et n'en comprennent qu'une, pourvu que G soit positive et que la quantité p n'augmente pas quand x augmente.

XXXII.

Lorsque G changera de signe entre les limites x et X, ou que p ne sera pas constante ou fonction décroissante de x, la fonction $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V} + p$ pourra tantôt croître, tantôt décroître. Comme en désignant par α et β deux valeurs de x consécutives qui annullent V, cette fonction $\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V} + p$ a toujours pour les valeurs de x un peu plus grandes que α des valeurs positives très grandes et pour les valeurs de x un peu plus petites que β des valeurs négatives très grandes, on voit que la fonction $K\dfrac{dV}{dx} + p$ V changera de signe une fois ou un nombre impair de fois entre α et β, et pourra même en outre s'évanouir sans changer de signe si l'on n'a pas constamment $GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0$. On voit aussi que si la quantité $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est positive pour une certaine valeur de x, $K\frac{dV}{dx}+pV$ changera de signe une fois ou un nombre impair de fois dans l'intervalle compris entre cette valeur de x et celle immédiatement supérieure qui annulle V, et que $K\frac{dV}{dx}+pV$ ne changera pas de signe ou en changera un nombre pair de fois dans l'intervalle compris entre la même valeur de x et celle immédiatement inférieure qui annulle V. L'inverse aura lieu, si $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est négative pour la valeur de x que l'on considère.

XXXIII.

G étant positive, si l'on remplace p par une quantité $p_,$ constante ou fonction décroissante de x qui pour chaque valeur de x soit un peu plus grande que p, les valeurs de x qui annulleront la fonction $K\frac{dV}{dx}+p_,V$ seront un peu plus grandes que celles qui annullent $K\frac{dV}{dx}+pV$, puisqu'on a pour chaque valeur de x,

$$\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+p_, > \frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+p$$

et que ces deux fonctions décroissent l'une et l'autre quand x augmente. On peut au surplus appliquer ici le raisonnement du n° XIX.

Si donc on prend successivement pour p des valeurs constantes croissantes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou des fonctions de x de plus en plus grandes qui décroissent tandis que x croît depuis x jusqu'à X, chaque valeur de x qui annulle $K\frac{dV}{dx}+pV$ doit augmenter en même temps que p, sans cesser d'être seule comprise entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V; celles-ci répondent à $p = \pm\infty$. Les valeurs de x qui annullent $\frac{dV}{dx}$ répondent à $p = 0$. Chacune d'elles rend V *maximum* (n° XXX).

XXXIV.

On a supposé depuis le n° XXX, la fonction G positive et p égale à une constante ou à une fonction de x qui décroît, tandis que x croît depuis x jusqu'à X. De là résulte $GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0$. Cette condition (14), la seule à laquelle p fût assujettie dans les n^{os} XXV... XXIX étant actuellement remplie, en supposant G positive et p constante ou fonction décroissante de x, on peut combiner les propositions de ces n^{os} XXV...XXIX avec celles des n^{os} suivants XXX, XXXI et XXXII et en déduire de nouvelles conséquences qu'il nous paraît superflu de développer.

XXXV.

En différentiant plusieurs fois l'équation (I) après l'avoir écrite ainsi :

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + GV = 0,$$

on obtiendra pour toutes les fonctions $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, etc.... des expressions de cette forme $Q\frac{dV}{dx} + RV$, Q et R étant des fonctions connues de x. Par conséquent, si l'on multiplie V, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, etc. par des fonctions de x arbitraires, la somme des produits pourra se réduire à une expression semblable $M\frac{dV}{dx} + NV$. En la mettant sous cette forme $\frac{M}{K}\left(K\frac{dV}{dx} + \frac{KN}{M}V\right)$, et faisant $\frac{KN}{M} = p$, on pourra lui appliquer les diverses propositions démontrées précédemment sur les changements de signe de la fonction $K\frac{dV}{dx} + pV$, pourvu que p remplisse les conditions énoncées.

XXXVI.

On peut déduire de la théorie qui précède un grand nombre de conséquences. Celles que nous allons développer suffiront pour faire comprendre le sens et l'usage de nos théorèmes.

Soit donnée l'équation

$$L\frac{d^2U}{dx^2} + M\frac{dU}{dx} + NU = 0, \qquad (15)$$

où L, M, N sont des fonctions de x données entre deux limites x et X. On peut la transformer dans la suivante :

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0, \qquad (16)$$

en faisant

$$U = \theta V.$$

θ étant une fonction arbitraire de x.

En effet l'équation (15) devient en y remplaçant U par θV,

$$L\theta\frac{dV^2}{dx^2} + \left(2L\frac{d\theta}{dx} + M\theta\right)\frac{dV}{dx} + \left(L\frac{d^2\theta}{dx^2} + M\frac{d\theta}{dx} + N\theta\right)V = 0,$$

et on la rend identique avec l'équation (16), en faisant

$$\frac{dK}{Kdx} = 2\frac{d\theta}{\theta dx} + \frac{M}{L},$$

$$\frac{G}{K} = \frac{L\frac{d^2\theta}{dx^2} + M\frac{d\theta}{dx} + N\theta}{L\theta}.$$

On tire de là

$$K = \theta^2.e^{\int\frac{Mdx}{L}}, \qquad (17)$$

puis

$$G = \frac{K}{L\theta}\left(L\frac{d^2\theta}{dx^2} + M\frac{d\theta}{dx} + N\theta\right) = \frac{\theta}{L}.e^{\int\frac{Mdx}{L}}\left(L\frac{d^2\theta}{dx^2} + M\frac{d\theta}{dx} + N\theta\right)$$

$$= \frac{N\theta^2}{L}.e^{\int\frac{Mdx}{L}} + \theta\left(e^{\int\frac{Mdx}{L}}\frac{d^2\theta}{dx^2} + e^{\int\frac{Mdx}{L}}\frac{M}{L}.\frac{d\theta}{dx}\right),$$

ou enfin,

$$G = \frac{N\theta}{L} \cdot e^{\int \frac{M dx}{L}} + \theta \cdot \frac{d}{dx} \cdot \left(e^{\int \frac{M dx}{L}} \cdot \frac{d\theta}{dx}\right). \qquad (18)$$

On connait ainsi les fonctions K et G (17) et (18) dans la nouvelle équation (16) qui remplace l'équation (15)

Si l'on prend la fonction arbitraire θ positive entre les limites x et X, U et V s'évanouiront pour les mêmes valeurs de x.

En supposant $\theta = 1$, on a $U = V$, et l'on retombe sur la transformation indiquée au commencement de ce mémoire, n° I, pour ramener l'équation

$$L \frac{d^2V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + NV = 0$$

à la forme

$$\frac{d \cdot \left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0.$$

Par cette transformation, l'équation (15) peut toujours être préparée de telle sorte qu'on ait $M = \frac{dL}{dx}$. Elle est alors

$$\frac{d \cdot \left(L \frac{dU}{dx}\right)}{dx} + NU = 0. \qquad (19)$$

En y faisant $U = \theta V$, pour la transformer dans celle-ci

$$\frac{d\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (16)$$

on trouve

$$K = \theta^2 L,$$

$$G = N\theta^2 + \theta . \frac{d\left(L \frac{d\theta}{dx}\right)}{dx} \quad (*).$$

(*) La variable indépendante est la même dans l'équation (19) et dans sa transformée (16) obtenue en faisant $U = \theta V$. On pourrait encore ramener l'équation (19) à une autre de même forme qui renfermerait la même fonction U en prenant

Si l'on prend en particulier $\theta = \frac{1}{\sqrt{L}}$, d'où $d\theta = \frac{-d\sqrt{L}}{L}$, on aura

$$K = 1, \qquad G = \frac{N}{L} - \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{d^2\sqrt{L}}{dx^2}, \qquad U = \frac{V}{\sqrt{L}}, \qquad (20)$$

et par ces substitutions l'équation proposée

$$\frac{d\left(L\frac{dU}{dx}\right)}{dx} + NU = 0 \qquad (19)$$

sera remplacée par celle-ci

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0 \qquad (21)$$

que nous allons considérer.

XXXVII.

Supposons que la fonction G soit positive pour toutes les valeurs de x croissantes depuis une valeur a jusqu'à une autre b.

Prenons une constante G' égale ou inférieure à la plus petite valeur de G dans l'intervalle compris entre a et b, et une autre constante G'' égale ou supérieure à la plus grande valeur de G dans le même intervalle, et posons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0, \\ &\frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' = 0. \end{aligned}\right\} (22)$$

---

une nouvelle variable indépendante z dont x serait fonction. Car cette equation (19) deviendrait

$$\frac{d}{dz} \cdot \left[\frac{L}{\left(\frac{dx}{dz}\right)} \cdot \frac{dU}{dz}\right] + N\left(\frac{dx}{dz}\right) . U = 0.$$

Si par exemple on détermine z de manière qu'on ait $\frac{dx}{dz} = L$ ou $dz = \frac{dx}{L}$, l'équation (19) deviendra

$$\frac{d^2U}{dz^2} + LN.U = 0.$$

Ces deux équations linéaires à coefficients constants s'intègrent et donnent

$$V' = C' \sin.(x\sqrt{G'} + c'),\quad V'' = C'' \sin.(x\sqrt{G''} + c'').$$

Quelles que soient les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ pour $x = a$, on peut toujours prendre les constantes arbitraires c', c'', C', C'', telles qu'on ait pour $x = a$

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \gtreqless \frac{\frac{dV}{dx}}{V},\quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \lesseqgtr \frac{\frac{dV}{dx}}{V},$$

et que V' et V'' aient pour $x = a$, le même signe que V.

Si V était nulle pour $x = a$, on prendrait

$$V' = C' \sin.[(x-a)\sqrt{G'}],\quad V'' = C'' \sin[(x-a)\sqrt{G''}],$$

afin d'avoir aussi $V' = 0$ et $V'' = 0$ pour $x = a$.

Cela posé, il résulte du théorème du n° XII, que la fonction inconnue V s'évanouira entre les limites a et b au moins autant de fois que V' et au plus autant de fois que V''.

Mais le sinus représenté par V' s'annulle pour une suite de valeurs de x équidifférentes dont la différence constante est $\frac{\pi}{\sqrt{G'}}$. V doit donc s'évanouir entre a et b, au moins autant de fois que l'intervalle $b-a$ contient $\frac{\pi}{\sqrt{G'}}$ ou autant de fois qu'il y a d'unités entières dans $\frac{(b-a)\sqrt{G'}}{\pi}$. On verra de même que V doit s'évanouir entre a et b au plus autant de fois qu'il y a d'unités dans $\frac{(b-a)\sqrt{G''}}{\pi} + 1$.

Conséquemment, lorsqu'en prenant l'intervalle $b-a$ de plus en plus grand, le produit $(b-a)\sqrt{G'}$ deviendra plus grand que tout nombre donné, V s'évanouira pour une infinité de valeurs de x croissantes jusqu'à l'infini. C'est ce qui a lieu toutes les fois que G ne diminue pas jusqu'à zéro, tandis que x croît depuis une valeur a jusqu'à l'infini; et lors même qu'en faisant croître x jusqu'à l'infini, G diminuera jusqu'à 0, V pourra encore s'évanouir pour une infinité de valeurs de x, puisqu'il suffit pour cela que le produit $(b-a)\sqrt{G'}$ augmente indéfiniment en même temps que b.

On peut prendre la limite b assez rapprochée de a pour que l'intervalle $b-a$ soit plus petit que $\frac{\pi}{\sqrt{G''}}$. Alors si pour $x=a$ et pour $x=b$, V a des valeurs de même signe, V ne s'évanouira pas entre les limites a et b; mais si V a des valeurs de signes contraires pour $x=a$ et pour $x=b$, V s'évanouira pour une seule valeur de x comprise entre a et b.

La principale difficulté de la résolution des équations numériques est, comme on sait, d'assigner des intervalles qui ne comprennent pas de racines ou qui n'en comprennent qu'une. A l'égard des équations $V=0$ qui nous occupent, cette difficulté est réduite par ce qui précède, à celle de déterminer le signe de la fonction V pour diverses valeurs de x suffisamment rapprochées.

Nous allons donner dans le numéro suivant des formules pour déterminer approximativement les valeurs de x qui annullent V.

XXXVIII.

L'intervalle $b-a$ étant pris plus petit que $\frac{\pi}{\sqrt{G''}}$, il ne peut y avoir entre a et b qu'une seule valeur de x qui annulle V. Il s'agit de déterminer cette valeur, si elle existe.

En posant les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2V'}{dx^2}+G'V'=0,\\ \frac{d^2V''}{dx^2}+G''V''=0,\end{aligned}\right\}(22)$$

on peut prendre pour V' et V'' les expressions suivantes :

$$\left.\begin{aligned}V'=C'\sin.[(x-a)\sqrt{G'}-t'],\\ V''=C''\sin.[(x-a)\sqrt{G''}-t''],\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

C', C'', t', t'', étant les constantes arbitraires. On peut d'ailleurs supposer les arcs de cercle t', t'', compris entre 0 et π.

On doit, d'après le théorème du n° XII, remplir les conditions

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \overline{\overline{>}} \frac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \overline{\overline{<}} \frac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{pour } x = a.$$

Or les valeurs (23) de V' et de V'' donnent pour $x = a$,

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} = -\frac{\sqrt{G'}}{\operatorname{tang} t'} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} = -\frac{\sqrt{G''}}{\operatorname{tang} t''}.$$

En désignant donc par p la valeur (positive ou negative) du rapport $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = a$, il faudra qu'on ait

$$-\frac{\sqrt{G'}}{\operatorname{tang} t'} \overline{\overline{>}} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{G''}}{\operatorname{tang} t''} \overline{\overline{<}} \frac{1}{p}.$$

On tire de là

$$\operatorname{tang} t' \overline{\overline{>}} -p\sqrt{G'}, \quad \operatorname{tang} t'' \overline{\overline{<}} -p\sqrt{G''}, \qquad (24)$$

pourvu toutefois qu'on prenne $\operatorname{tang} t'$ et $\operatorname{tang} t''$ d'un signe contraire à celui de p : les quantités t' et t'' doivent d'ailleurs être comprises entre o et π.

On voit d'après l'expression (23) de V' qu'on aura la plus petite valeur de x immédiatement supérieure à a qui annulle V' en posant

$$(x - a)\sqrt{G'} - t' = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = a + \frac{t'}{\sqrt{G'}};$$

de même la plus petite valeur de x au-dessus de a qui annulle V'' est $a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}$.

Cela posé, si l'on désigne par ξ la valeur de x immédiatement supérieure à a qui annulle la fonction V, et si cette valeur ξ ne surpasse pas b, on aura en vertu du théorème du n° XII.

$$\xi < a + \frac{t'}{\sqrt{G'}}, \quad \xi > a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}. \qquad (25)$$

Les quantités t', t'' comprises entre o et π étant déterminées par les formules (24).

Ainsi l'on connaîtra deux limites entre lesquelles sera comprise l'inconnue ξ, pourvu que ξ tombe entre a et b, comme on l'a supposé.

Si ces deux limites ne surpassent pas b, on sera certain qu'il existe entre elles une valeur de x qui annulle V; cette valeur désignée par ξ est d'ailleurs la seule entre a et b qui annulle V.

Si la limite inférieure $a+\frac{t''}{\sqrt{G''}}$ surpasse b, on en conclura que la fonction V ne s'évanouit pas quand x croît depuis a jusqu'à b.

Mais si b est comprise entre $a+\frac{t''}{\sqrt{G''}}$ et $a+\frac{t'}{\sqrt{G'}}$, on sera dans l'alternative de savoir si V s'annulle pour une valeur de x comprise entre $a+\frac{t''}{\sqrt{G''}}$ et b, ou si V ne change pas de signe dans l'intervalle de a à b; la question serait décidée si l'on connaissait le signe de V pour $x=b$, comme pour $x=a$.

Les formules (24, 25) sont relatives à la valeur a plus petite que la racine cherchée ξ. On peut établir des formules analogues qui se rapportent à la valeur b plus grande que ξ.

On présente les valeurs de V' et V'' qui satisfont aux équations (22), sous cette forme :

$$\begin{aligned} V' &= C' \sin.\left[(x-b)\sqrt{G'}+u'\right], \\ V'' &= C'' \sin.\left[(x-b)\sqrt{G''}+u''\right]. \end{aligned}$$

On remplit les conditions

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \leqq \frac{\frac{dV}{dx}}{V}, \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \geqq \frac{\frac{dV}{dx}}{V} \text{ pour } x=b;$$

en prenant

$$\operatorname{tang} u' \geqq q\sqrt{G'}, \quad \operatorname{tang} u'' \leqq q\sqrt{G''}, \qquad (26)$$

q désigne la valeur de $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x=b$; tang u' et tang u'' doivent avoir le même signe que q, et l'on prend u' et u'' entre o et π.

La valeur de x immédiatement inférieure à b qui annulle V' est $b - \frac{u'}{\sqrt{G'}}$; celle qui annulle V'' est $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$. En désignant toujours par ξ la valeur de x comprise entre a et b qui annulle V, on a, d'après le n° XX,

$$\xi > b - \frac{u'}{\sqrt{G'}} \quad \text{et} \quad \xi < b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}. \tag{27}$$

Si ces deux limites ne sont pas moindres que a, on sera certain qu'il existe entre elles une valeur ξ de x qui annulle V.

Si la limite supérieure $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$ est plus petite que a, V ne pourra point s'évanouir entre a et b.

Enfin, si a est comprise entre $b - \frac{u'}{\sqrt{G'}}$ et $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$, il pourra se faire que V s'annulle pour une valeur de x comprise entre a et $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$, ou bien que V ne s'annulle pas dans l'intervalle de a à b, on décidera la question si l'on connaît le signe de V pour $x = a$ comme pour $x = b$.

On peut donc par le moyen des formules (24, 25, 26 et 27) lorsqu'on a deux limites a et b comprenant une seule valeur de x qui annulle V, déterminer de nouvelles limites a' et b' qui approchent davantage de cette valeur ξ. Pour faire usage de ces formules, il n'est pas nécessaire d'avoir la valeur exacte p de $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = a$; il suffit de connaître par un moyen quelconque une valeur plus petite que p et une autre plus grande que p. Il en est de même pour q.

On obtiendra de nouvelles valeurs encore plus approchées de ξ en appliquant les mêmes formules (24,...) aux limites a' et b' qu'on vient de déterminer; il faut pour cela calculer, s'il est possible, des valeurs approchées de $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = a'$ ou pour $x = b'$, et prendre deux nouvelles constantes $G' < G$ et $G'' > G$ dans l'intervalle compris entre a' et b'.

XXXIX.

Prenons maintenant pour les limites a et b deux valeurs de x consécutives α et 6 qui annullent V et supposons que pour $x=\alpha$, on ait $V'=0$, $V''=0$, en même temps que $V=0$.

En prenant la constante $G'<G$ et $G''>G$ dans l'intervalle compris entre α et 6, nous aurons

$$V'=C'\sin.\left[(x-\alpha)\sqrt{G'}\right],\quad V''=C''\sin.\left[(x-\alpha)\sqrt{G''}\right].$$

D'après le théorème du n° XII, la valeur 6 qui annulle V doit être plus grande que la première valeur de x au-delà de α qui annulle V'' et plus petite que la première valeur de x au-delà de α qui annulle V', d'où résulte

$$6-\alpha > \frac{\pi}{\sqrt{G''}},\quad 6-\alpha < \frac{\pi}{\sqrt{G'}},$$

et par conséquent,

$$6-\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{G(\xi)}},\qquad (28)$$

ξ étant une certaine valeur de x comprise entre α et 6, et $G(\xi)$ la valeur de G correspondante à $x=\xi$.

On a de même, en désignant par γ la valeur de x immédiatement supérieure à 6 qui annulle V,

$$\gamma-6=\frac{\pi}{\sqrt{G(\xi')}},\quad \xi' \text{ étant entre } 6 \text{ et } \gamma.$$

Supposons que G diminue continuellement jusqu'à la valeur λ, tandis que x croît depuis a jusqu'à b, et soient α, 6, γ... les valeurs de x comprises entre a et b qui annullent V; on a alors $G(\xi') < G(\xi)$ et par conséquent $\gamma - 6 > 6 - \alpha$: ainsi les différences entre ces valeurs de x consécutives comprises entre a et b qui annullent V vont en augmentant et s'approchent de la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ qu'elles ne peuvent dépasser.

Cette proposition subsiste lorsque G diminue jusqu'à la limite λ tandis que x croît depuis la valeur a jusqu'à $b=\infty$. Dans ce dernier cas, si la limite λ de G est o, les différences $\beta-\alpha$, $\gamma-\beta$,... deviendront plus grandes que tout nombre donné, quoiqu'il puisse exister encore une infinité de valeurs au-delà de a qui annullent V.

On voit de même que si G augmente continuellement en s'approchant d'une limite Λ tandis que x croît depuis a jusqu'à b, b pouvant être infinie, les différences entre les valeurs de x comprises entre a et b qui annullent V diminuent progressivement et convergent vers $\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}$; il s'ensuit que si $b=\infty$, V s'annulle pour un nombre infini de valeurs de x, comme on l'a déjà vu plus haut n° XXXVII; et si G augmente jusqu'à l'infini en même temps que x, les différences entre ces valeurs finissent par devenir plus petites que toute quantité donnée.

Ces résultats sont applicables par exemple à la fonction U donnée par l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dU}{dx}+\left(r^2-\frac{n}{x^2}\right)U=0,\\ \text{ou}\qquad &\frac{d\left(x\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\left(r^2x-\frac{n}{x}\right)U=0,\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

qu'on rencontre dans plusieurs problèmes de physique et de mécanique, r et n étant des constantes. M. Poisson a donné dans ses mémoires l'expression de cette fonction en intégrales définies.

La transformation $U=\frac{V}{\sqrt{L}}$ (n° XXXVI) donne ici

$$U=\frac{V}{\sqrt{x}},\quad G=r^2+\frac{1-4n}{4x^2}$$

et

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\left(r^2+\frac{1-4n}{4x^2}\right)V=0.$$

Lorsqu'on a $n<\frac{1}{4}$, G diminue continuellement en s'approchant de la limite r^2, tandis que x croît depuis o jusqu'à ∞. V ou U doit donc s'évanouir pour une infinité de valeurs de x, dont les différences consécutives vont en augmentant et convergent rapidement vers la limite

$\frac{\pi}{r}$ sans pouvoir la dépasser; de plus on a

$$6 - \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{r^2 + \frac{1-4n}{4\xi^2}}}, \qquad (30)$$

ξ étant une certaine valeur de x comprise entre α et 6 et conséquemment entre α et $\alpha + \frac{\pi}{r}$.

Quand on a $n > \frac{1}{4}$, G augmente depuis o jusqu'à r^2, tandis que x croît depuis la valeur $\frac{\sqrt{4n-1}}{2r}$ jusqu'à $+\infty$. V doit donc s'évanouir encore pour une infinité de valeurs de x dont les différences diminuent continuellement et tendent vers la constante $\frac{\pi}{r}$ qu'elles surpassent toujours: on a de plus

$$6 - \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{r^2 - \frac{4n-1}{4\xi^2}}}, \quad \xi \text{ tombant entre } \alpha \text{ et } 6. \qquad (30)$$

Lorsqu'on aura calculé à l'aide des formules du n° **XXXVIII**, quelques-unes des plus petites valeurs de x qui annullent V ou U, les formules (30) donneront les valeurs suivantes avec assez d'approximation.

XL.

Il arrive fréquemment que, dans l'équation générale

$$\frac{d.\left(L\frac{dU}{dx}\right)}{dx} + NU = 0,$$

qui devient

$$\frac{d^2V}{d^2x} + GV = 0,$$

en faisant

$$V = U\sqrt{L} \quad \text{et} \quad G = \frac{N}{L} - \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{d^2\sqrt{L}}{dx^2} \text{ (n° XXXVI)},$$

les fonctions L, N, contiennent avec x une autre indéterminée r, et qu'en faisant croître r depuis une certaine valeur jusqu'à $+\infty$ la fonction G est positive et augmente indéfiniment avec r. Dans ce cas, V ou U s'évanouira autant de fois qu'on voudra entre deux limites a et b, quelque rapprochées qu'elles soient, pourvu qu'on attribue à r une valeur suffisamment grande.

De cette propriété et de la deuxième partie du théorème des nos XII et XV, on conclut encore que, si U a toujours le même signe pour une certaine valeur de x quelle que soit r, et si l'on attribue à x une autre valeur particulière quelconque plus grande ou plus petite, cette fonction U ne contenant plus d'autre variable que r, s'évanouira et changera de signe pour une infinité de valeurs de r croissantes jusqu'à l'infini, et d'après le n° XX, il en sera de même de la fonction $L\frac{dU}{dx}+HU$, H étant une quantité constante ou une fonction quelconque de r.

Ces propriétés conviennent, par exemple, à la fonction U donnée par l'équation (29); elles auront encore lieu si l'on prend plus généralement

$$L = lr^{\lambda} + l'r^{\lambda'} + \text{etc.}, \quad N = nr^{\nu} + n'r^{\nu'} + \ldots,$$

l, n étant des fonctions positives de x sans r, l', n', l''... d'autres fonctions de x tout-à-fait arbitraires, λ, λ'... des exposants quelconques décroissants de même que ν, ν'... et $\lambda < \nu$. Si l'on avait $\lambda = \nu$ ou $> \nu$, U ne pourrait s'évanouir qu'un nombre limité de fois entre a et b quelle que fût r, et en donnant à x une valeur particulière, il n'y aurait qu'un nombre limité de valeurs de r qui pourraient annuller U aussi bien que $L\frac{dU}{dx}+HU$.

Dans les problèmes de physique, l'indéterminée r ne se trouve ordinairement qu'au 1er ou au 2e degré dans N et n'entre pas dans L.

XLI.

Pour compléter la théorie qui précède, nous allons encore comparer les valeurs des deux fonctions V', V'', définies par les équations différentielles

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' = 0,$$

dans l'intervalle compris entre deux limites a et b, en supposant que ces deux fonctions ne changent pas de signe dans cet intervalle, et qu'on ait

$$\text{pour } x = a,\ \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'}:$$

G' et G'' sont comme dans le n° XII des fonctions données de x, telles que G'' est $\geqq G'$.

Ces fonctions V' et V'' ne changeant pas de signe entre les limites a et b, il est permis pour le but que nous nous proposons de les supposer toutes deux positives entre ces limites. Car si V' par exemple était négative, on pourrait changer son signe et la regarder comme positive, sans qu'elle cessât de vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0,$$

et la condition

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \geqq \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \text{ pour } x = a.$$

Considérons une autre fonction V donnée par l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0,$$

G étant comme dans les n^{os} VI et suivants, une fonction de x et d'une indéterminée m, qui devienne la même que G' quand on fait $m = m'$, la même que G'' quand $m = m''$, et qui augmente quand m croît depuis m' jusqu'à m''. Supposons en outre que la valeur de $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = a$, d'abord égale à celle de $\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'}$ quand $m = m'$, décroisse ou du moins ne croisse pas quand m augmente et devienne égale à celle de $\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''}$ quand m devient égale à m''.

Ces conditions étant admises, il ne peut pas arriver que tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', la fonction V s'évanouisse pour une valeur de x comprise entre a et b; car dans ce cas V'' s'évanouirait pour une valeur moindre, ce qui est contre l'hypothèse. V sera donc constamment positive comme V' et V'' entre ces limites a et b, et le rapport $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}$ ne deviendra point infini. Mais d'après le n° VI, cette quantité $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}$ doit décroître continuellement, tandis que m augmente : ses valeurs extrêmes sont $\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'}$ et $\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''}$. On aura donc pour chaque valeur de x comprise entre a et b,

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} < \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'},$$

puis en multipliant par la quantité positive V'V'',

$$V'' \frac{dV'}{dx} - V' \frac{dV''}{dx} > 0.$$

On en conclut

$$\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{V'}{V''}\right) > 0;$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{V'}{V''}$ augmente tandis que x croît depuis a jusqu'à b. Si donc on suppose $V' \overline{\underline{>}} V''$ pour $x = a$ on aura constamment $V' > V''$ pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b.

On peut arriver au même résultat d'une autre manière plus directe. Les deux équations différentielles

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0,$$
$$\frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' = 0,$$

donnent celle-ci

$$V''\frac{d^2V'}{dx^2} - V'\frac{d^2V''}{dx^2} = (G'' - G')\, V'V'';$$

ou bien

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx}\right) = (G'' - G')\, V'V''. \quad (31)$$

Par hypothèse, V' et V'' sont positives entre les limites a et b, et l'on a $G'' > G'$; le terme $(G'' - G')\, V'V''$ est donc positif et l'on a

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx}\right) > 0,$$

d'où il suit que la quantité $V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx}$ augmente, tandis que x croît depuis a jusqu'à b. Si donc on suppose cette quantité positive ou nulle pour $x = a$, ce qui donne

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ pour } x = a,$$

on aura depuis a jusqu'à b,

$$V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx} > 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{V'}{V''}\right) > 0;$$

d'où l'on conclut comme précédemment, que $\frac{V'}{V''}$ augmente en même temps que x, et que si l'on a $V' \overline{>} V''$ pour $x = a$, on aura $V' > V''$ pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b.

On trouvera de la même manière que $\frac{V'}{V''}$ diminue tandis que x croît depuis a jusqu'à b, et qu'on a dans cet intervalle $V' > V''$, si l'on a

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \overset{>}{=} \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ et } V' \overset{=}{>} V'' \text{ pour } x = b,$$

au lieu de supposer, pour $x = a$,

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \overset{<}{=} \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ et } V' \overset{=}{>} V''.$$

On parviendra encore aux mêmes conclusions, si V' et V'' sont nulles en même temps pour $x = a$, ou pour $x = b$, pourvu qu'alors on prenne $\frac{dV'}{dx} \overset{=}{>} \frac{dV''}{dx}$ pour $x = a$, ou $\frac{dV'}{dx} \overset{=}{<} \frac{dV''}{dx}$ pour $x = b$, en observant que le rapport $\frac{V'}{V''}$ devient égal à celui des différentielles $\frac{dV'}{dx}$, $\frac{dV''}{dx}$, quand V' et V'' sont nulles.

XLII.

On peut, par ce qui précède, déterminer dans tout l'intervalle compris entre deux limites a et b des valeurs approchées de la fonction V définie par l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0, \tag{32}$$

G étant une fonction quelconque de x, lorsqu'on connaît les valeurs exactes ou approchées de V et de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=a$ ou pour $x=b$, et que V ne change pas de signe ou demeure positive entre ces limites.

A cet effet, on déterminera des fonctions V' et V'' qui vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' &= 0, \\ \frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

G' étant une fonction de x ou une constante plus petite que G entre les limites a et b, et G'' une autre fonction de x ou une constante plus grande que G.

On intégrera ces équations (33) en remplissant les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \overset{>}{=} \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V' \overset{>}{=} V, \quad \text{pour} \quad x = a, \\ \dfrac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \overset{<}{=} \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V'' \overset{<}{=} V, \quad \text{pour} \quad x = a, \end{array}\right\} \quad (34)$$

V étant par hypothèse positive entre les limites a et b, V' sera aussi nécessairement positive, et si l'on trouve que V'' l'est encore, on aura pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b

$$V < V' \quad \text{et} \quad V > V''.$$

En outre $\frac{V}{V'}$ diminuera et $\frac{V}{V''}$ augmentera, tandis que x croîtra dans cet intervalle.

Si l'on intègre les équations (33) en supprimant les conditions (34) pour $x = a$ et les remplaçant par celles que voici pour $x = b$,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \overset{<}{=} \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V' \overset{>}{=} V, \\ \dfrac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \overset{>}{=} \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V'' \overset{<}{=} V. \end{array}\right\} \text{pour } x = b \quad (35)$$

On aura encore entre a et b

$$V < V' \quad \text{et} \quad V > V';$$

d'ailleurs $\frac{V}{V'}$ augmentera et $\frac{V}{V''}$ diminuera, tandis que x croîtra depuis a jusqu'à b.

On peut ainsi, en rapprochant suffisamment les limites a et b et choisissant convenablement G' et G'', déterminer pour chaque valeur de x entre a et b, des valeurs V' et V'' entre lesquelles soit comprise celle de la fonction inconnue V. Par exemple, si G est positive entre

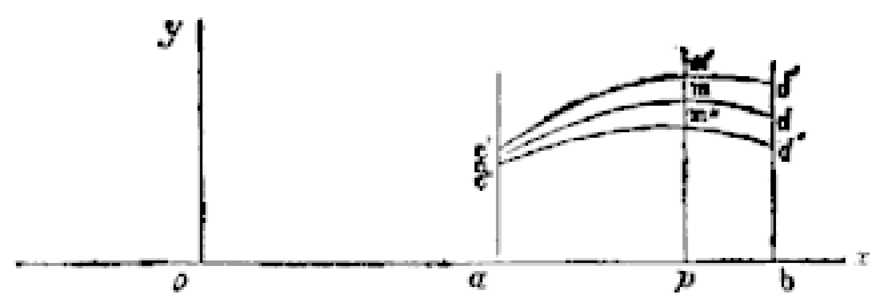
a et b et qu'on prenne G′ et G″ constantes, $G' < G$ et $G'' > G$, on aura pour V′ une expression de cette forme

$$V' = C \sin.\left[(x-a)\sqrt{G'}\right] + D \cos.\left[(x-a)\sqrt{G'}\right],$$

ou bien

$$V' = C \sin.\left[(b-x)\sqrt{G'}\right] + D \cos\left[(b-x)\sqrt{G'}\right],$$

et une expression semblable pour V″; on déterminera les constantes arbitraires C, D,... de manière que les conditions (34) ou (35) soient satisfaites; alors pour chaque valeur de x entre a et b, la valeur de V sera comprise entre celles de ces deux fonctions trigonométriques V′ et V″ qui pourront différer très peu l'une de l'autre, surtout si G varie peu entre les limites a et b. Si G est négative entre a et b, V′ et V″ deviendront des fonctions exponentielles. La courbe inconnue cmd dont l'ordonnée serait V, se trouve par là renfermée entre deux courbes connues $c'm'd'$, $c''m''d''$ ayant pour ordonnées V′ et V″, qui lui servent de limites, pour toutes les valeurs de l'abscisse x croissantes depuis a jusqu'à b, comme l'indique la figure (*).



(*) En intégrant l'équation (31) entre des limites quelconques, on trouve

$$V'' \frac{dV'}{dx} - V' \frac{dV''}{dx} = C + \int (G'' - G')\, V'V''\, dx. \qquad (36)$$

Cette formule coïncide avec l'équation (9) du n° V, lorsqu'on suppose dans celle-ci et dans les deux équations différentielles dont elle provient, $K = 1$ et $K' = 1$.

On peut en s'appuyant sur cette formule (36), démontrer d'une manière nouvelle la première partie du théorème du n° XII, en y supposant toutefois les fonctions K′ et K″ réduites à l'unité.

On prouve d'abord que deux valeurs consécutives de x qui annullent V′ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle V″.

En effet, supposons, s'il est possible, qu'entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent V′, il n'y ait pas de valeur de x qui annulle V″. On peut alors

XLIII.

Les considérations précédentes sur l'équation $\frac{d^2V}{dx^2}+GV=o$ peuvent s'étendre avec quelques modifications à l'équation plus générale $\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=o$ à laquelle on ramène $L\frac{d^2U}{dx^2}+M\frac{dU}{dx}+NU=o$ en faisant $U=\theta V$, θ étant un facteur arbitraire.

---

supposer ces deux fonctions V' et V'' positives dans l'intervalle compris entre α et β, puisqu'il est permis de changer le signe de chacune.

Dans l'équation (36), l'intégrale $\int(G''-G')V'V''dx$ prise entre ces limites α et β sera donc positive. La constante C sera positive ou nulle, car elle est égale à la valeur du premier membre $V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}$ pour $x=\alpha$; or V' est nulle pour $x=\alpha$, $\frac{dV'}{dx}$ a pour $x=\alpha$ le même signe que V' a pour les valeurs de x un peu plus grandes que α, c'est-à-dire le signe $+$; et en outre V'' est supposée positive ou nulle pour $x=\alpha$.

On aura donc pour toutes les valeurs de x depuis α jusqu'à β

$$V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}>o,$$

et puisque V' redevient nulle pour $x=\beta$ on a

$$V''\frac{dV'}{dx}>o \text{ pour } x=\beta.$$

Donc V'' qu'on suppose positive entre les limites α et β ne peut pas être nulle pour la valeur même $x=\beta$, de sorte qu'elle est encore positive pour $x=\beta$. Et puisqu'on a $V''\frac{dV'}{dx}>o$ pour $x=\beta$, $\frac{dV'}{dx}$ devrait être aussi positive pour $x=\beta$, mais au contraire $\frac{dV'}{dx}$ est négative pour $x=\beta$, car la fonction V' passe du positif au négatif en prenant le signe de $\frac{dV'}{dx}$ quand x atteint et dépasse la valeur β.

Il est donc absurde de supposer que V'' ne change pas de signe entre les limites α et β, V'' étant ou n'étant pas nulle pour $x=\alpha$.

On pourrait aussi, d'après les nos XXVI...XXXV, établir relativement aux valeurs de x qui annullent la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$, des propositions analogues à celles que nous avons données pour V. Il nous parait superflu de nous y arrêter. Nous terminerons par quelques remarques.

Étant donnée l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0,$$

si l'on considère la fonction V dans l'intervalle compris entre deux valeurs quelconques de x, a et $a+i$, et ensuite dans un autre intervalle égal au premier compris entre deux autres valeurs c et $c+i$, on peut à l'aide de nos théorèmes comparer les états de cette fonction dans ces deux intervalles.

On démontrera d'une manière semblable à l'aide de la même formule (36) que si l'on a pour une valeur de x désignée par x

$$V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx} \geqq 0 \text{ ou } \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'},$$

il doit exister entre x, et la valeur de x immédiatement supérieure à x qui annulle V', au moins une valeur de x qui annulle V''.

De ces propositions réunies on conclut la première partie du théorème du n° XII, en y réduisant K' et K'' à l'unité.

On peut encore la démontrer de la manière suivante :

Supposons de nouveau, s'il est possible, qu'entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent V' il n'y ait pas de valeur de x qui annulle V''. On peut alors supposer V' et V'' positives entre les limites α et β dans l'équation (36); l'intégrale $\int (G'' - G')\, V'V''dx$ prise entre ces limites sera donc positive. La constante C sera positive ou nulle puisqu'elle est égale à la valeur de $V''\frac{dV'}{dx} \qquad \frac{dV''}{dx}$ pour $x=\alpha$, et que pour $x=\alpha$, V' est nulle, $\frac{dV'}{dx}$ est positive et V'' positive ou nulle.

On a donc pour toutes les valeurs de x croissantes depuis α jusqu'à β,

$$V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}>0,$$

On fait d'abord $x=a+x'$ et en désignant par G', K' et V' ce que deviennent les fonctions G, K et V par la substitution de $a+x'$ à la place de x, l'équation (I) devient

$$\frac{d\left(K'\frac{dV'}{dx'}\right)}{dx'} + G'V' = 0.$$

En faisant de même $x=a+x''$, elle devient aussi

$$\frac{d\left(K''\frac{dV''}{dx''}\right)}{dx''} + G''V'' = 0.$$

On suppose maintenant que x' et x'' représentent une seule et même variable croissante depuis o jusqu'à i, et l'on établit la comparaison

---

d'où $V''\dfrac{dV'}{dx} > 0$ pour $x=\mathrm{C}$; par conséquent V'' qu'on suppose positive entre les limites α et C ne peut pas être nulle et doit être encore positive pour $x=\mathrm{C}$. Mais $V''\dfrac{dV'}{dx} - V'\dfrac{dV''}{dx} > 0$, donne $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{V'}{V''}\right) > 0$. Ainsi, tandis que x croît depuis α jusqu'à C, la quantité $\dfrac{V'}{V''}$ augmente continuellement, sans devenir infinie. Mais pour les valeurs de x un peu plus grandes que α on a $\dfrac{V'}{V''} > 0$, puisque V' et V'' sont positives. On devrait donc avoir aussi $\dfrac{V'}{V''} > 0$ pour $x=\mathrm{C}$, ce qui n'est pas, puisque pour $x=\mathrm{C}$, V' est nulle par hypothèse et que V'' ne peut pas l'être. On ne peut donc pas supposer que V'' ne change pas de signe entre les limites α et C. On prouvera de même que si l'on a pour $x=\mathrm{x}$

$$V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx} \geqq 0 \text{ ou } \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'};$$

en faisant croître x à partir de x, V'' devra s'annuller avant V'. De là résulte la première partie du théorème du n° 12, les fonctions K' et K'' y étant réduites à l'unité.

Quoique la démonstration de ce théorème développée dans les n^{os} VII...XI soit plus complète et plus lumineuse que celles que nous venons d'indiquer, nous n'avons pas cru devoir les passer sous silence, parce qu'elles peuvent être utiles dans d'autres occasions.

entre V' et V''. C'est ainsi qu'on peut comparer entre elles deux portions différentes d'une ligne courbe correspondantes à des intervalles égaux pris sur l'axe des abscisses, en superposant ces deux intervalles.

Plus généralement on peut faire successivement x égale à une fonction quelconque d'une indéterminée x', puis à une autre fonction d'une autre indéterminée x''. Alors V se changera en une fonction V' de x' et en une fonction V'' de x''. On comparera ensuite V' et V'' en supposant que x' et x'' représentent une seule et même variable indépendante.

La théorie exposée dans ce mémoire sur les équations différentielles linéaires de la forme

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NU = 0.$$

correspond à une théorie tout-à-fait analogue que je me suis faite antérieurement sur les équations linéaires du second ordre à différences finies de cette forme

$$LU_{i+1} + MU_i + NU_{i-1} = 0.$$

i est un indice variable qui remplace la variable continue x; L, M, N, sont des fonctions de cet indice i et d'une indéterminée m, qu'on assujettit à certaines conditions. C'est en étudiant les propriétés d'une suite de fonctions U_0, U_1, U_2, U_3,... liées entre elles par un système d'équations semblables à la précédente que j'ai rencontré mon théorème sur la détermination du nombre des racines réelles d'une équation numérique comprises entre deux limites quelconques, lequel est renfermé comme cas particulier dans la théorie que je ne fais qu'indiquer ici. Elle devient celle qui fait le sujet de ce mémoire, par le passage des différences finies aux différences infiniment petites. Je dois dire cependant que j'ai trouvé pour les équations à différences finies dont il s'agit, des propositions et des démonstrations spéciales qui ne sont pas susceptibles d'être transportées aux équations différentielles.