# Promenade(s) dans l’Irrationnel

*" Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est l’œuvre de l’Homme. "*

Leopold KRONECKER (1823-1891)


*" [Le boléro de Ravel]est une musique directement liée à l’irrationnel. "*

Claude LELOUCH

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique



## Partie II : Étude de Cas. Le Nombre *e*, niveau lycée

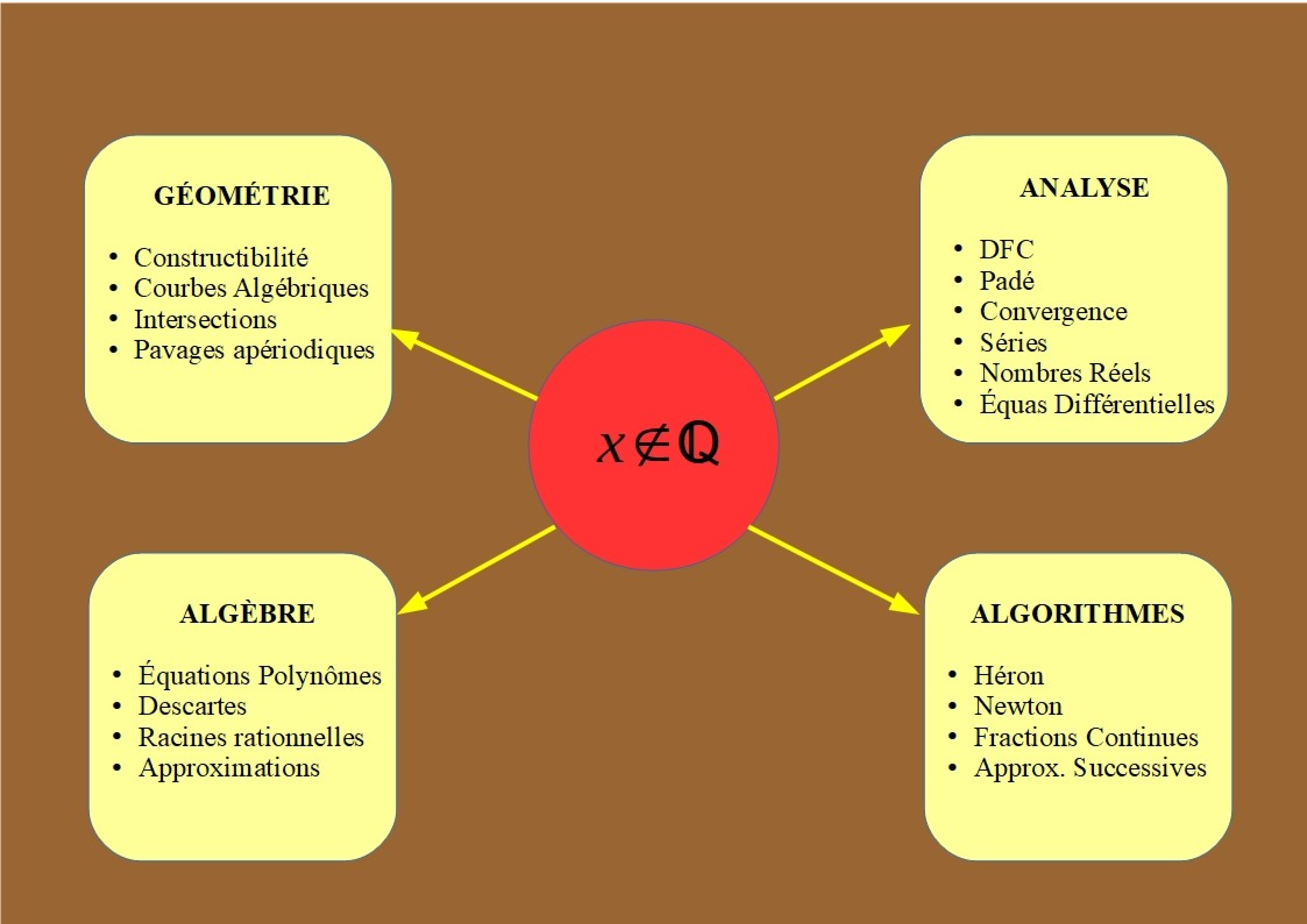


## Partie III : Étude de Textes. Quelques exemples



***Et pour une autre fois…***

**Euler dans tous ses Zéta !**


GÉOMÉTRIE
Constructibilité
Courbes Algébriques
Intersections
Pavages apériodiques
ANALYSE
DFC
Padé
Convergence
Séries
Nombres Réels
Équas Différentielles
$x \notin \mathbb{Q}$
ALGÈBRE
Équations Polynômes
Descartes
Racines rationnelles
Approximations
ALGORITHMES
Héron
Newton
Fractions Continues
Approx. Successives

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

**1. Coup d'oeil d'ensemble**

**2. De la Géométrie à l'Algèbre**

**2.1 Des Racines et des Problèmes**
**2.2 Des Arts Florissants…**
**2.3 ...Au Cantor**

**3. L'Outil des Grandes Découvertes**

**3.1 (Introduction aux) Fractions Continues**
**3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…**

**4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?**

**5. Alternatives Pratiques :**
**Géométriques, Mécaniques, Numériques ?**

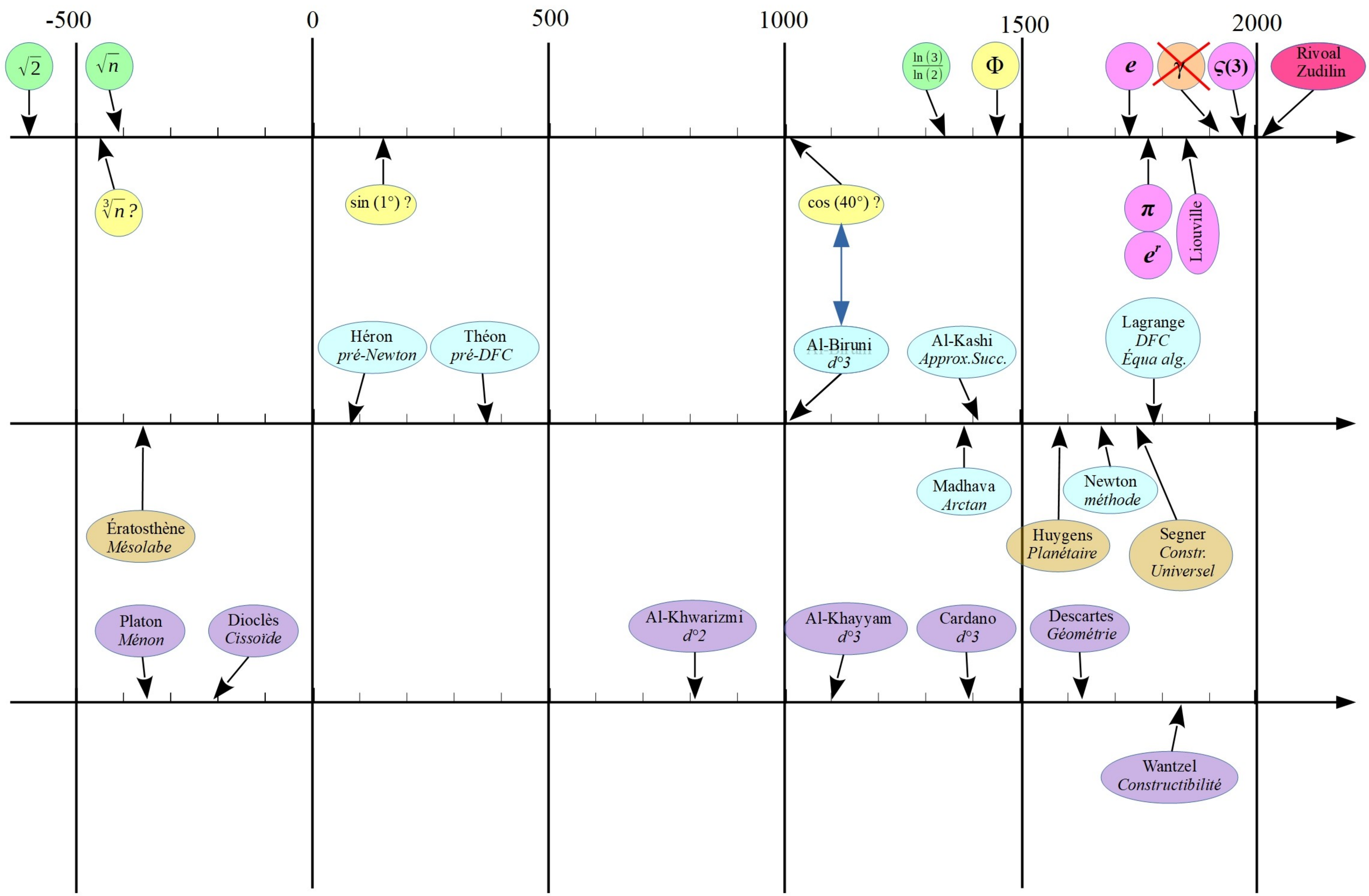
## Partie II : Étude de Cas.
## Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes.
## Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

***Et pour une autre fois…***
**Euler dans tous ses Zéta !**



-500
0
500
1000
1500
2000
$\sqrt{2}$
$\sqrt{n}$
$\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$
$\Phi$
$e$
$\cancel{\gamma}$
$\varsigma(3)$
Rivoal Zudilin
$\sqrt[3]{n}$ ?
sin (1°) ?
cos (40°) ?
$\pi$
$e^r$
Liouville
Héron *pré-Newton*
Théon *pré-DFC*
Al-Biruni *d°3*
Al-Kashi *Approx.Succ.*
Lagrange *DFC* *Équa alg.*
Madhava *Arctan*
Newton *méthode*
Ératosthène *Mésolabe*
Huygens *Planétaire*
Segner *Constr. Universel*
Platon *Ménon*
Dioclès *Cissoïde*
Al-Khwarizmi *d°2*
Al-Khayyam *d°3*
Cardano *d°3*
Descartes *Géométrie*
Wantzel *Constructibilité*

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. **De la Géométrie à l'Algèbre**

   **2.1 Des Racines et des Problèmes**
   2.2 Des Arts Florissants…
   2.3 ...Au Cantor

3. L'Outil des Grandes Découvertes

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

## Partie II : Étude de Cas. Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

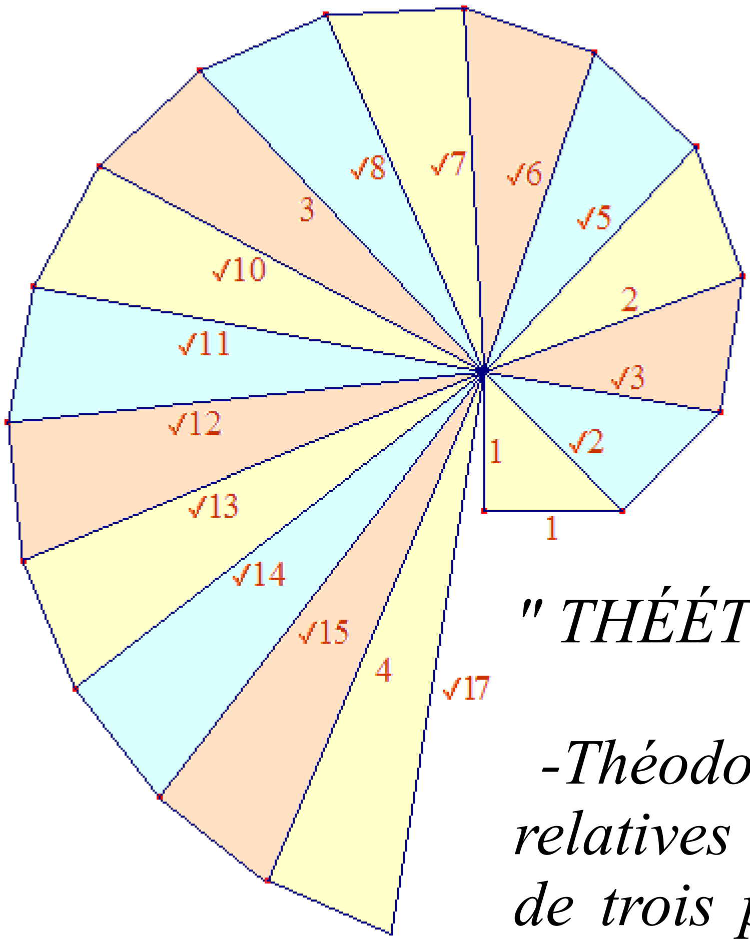
## Partie III : Étude de Textes. Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**


ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ
Ο
ΣΑΜΙΟΣ
ΔΩΡΕΑ ΕΜΜ. ΣΚΟΠΕΛΙΤΗ

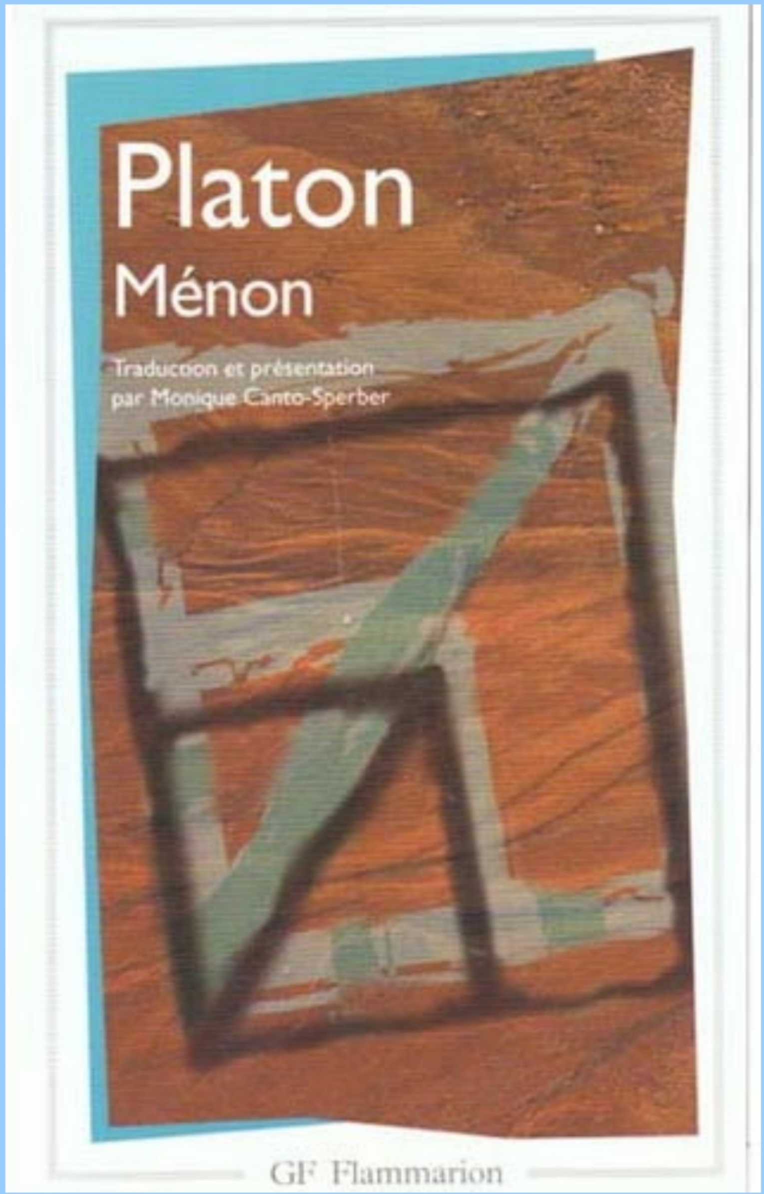
# Théodore de Cyrène
# ( -465 ?  à  -398 ? )

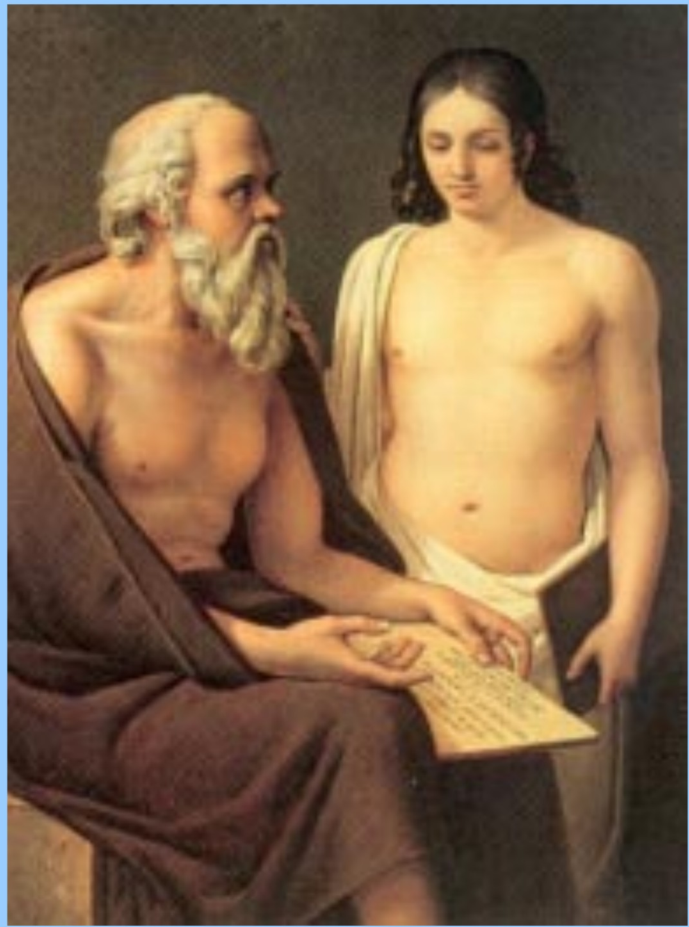



*" THÉÉTÈTE :*

*-Théodore [...] avait fait, devant nous, les constructions relatives à quelques unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérées dans leur longueur,* ***commensurables*** *à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une ,* ***jusqu'à celle de 17 pieds : il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.*** *"*

PLATON, *Théétète*



José Aparicio Inglada (1770-1838)
*Socrate enseignant*, 1811

# Cnossos

## Le Palais de Minos

*Tombe minoenne*


*Guide de Délos*
(École Française d'Athènes, 1965 rééd 1983)

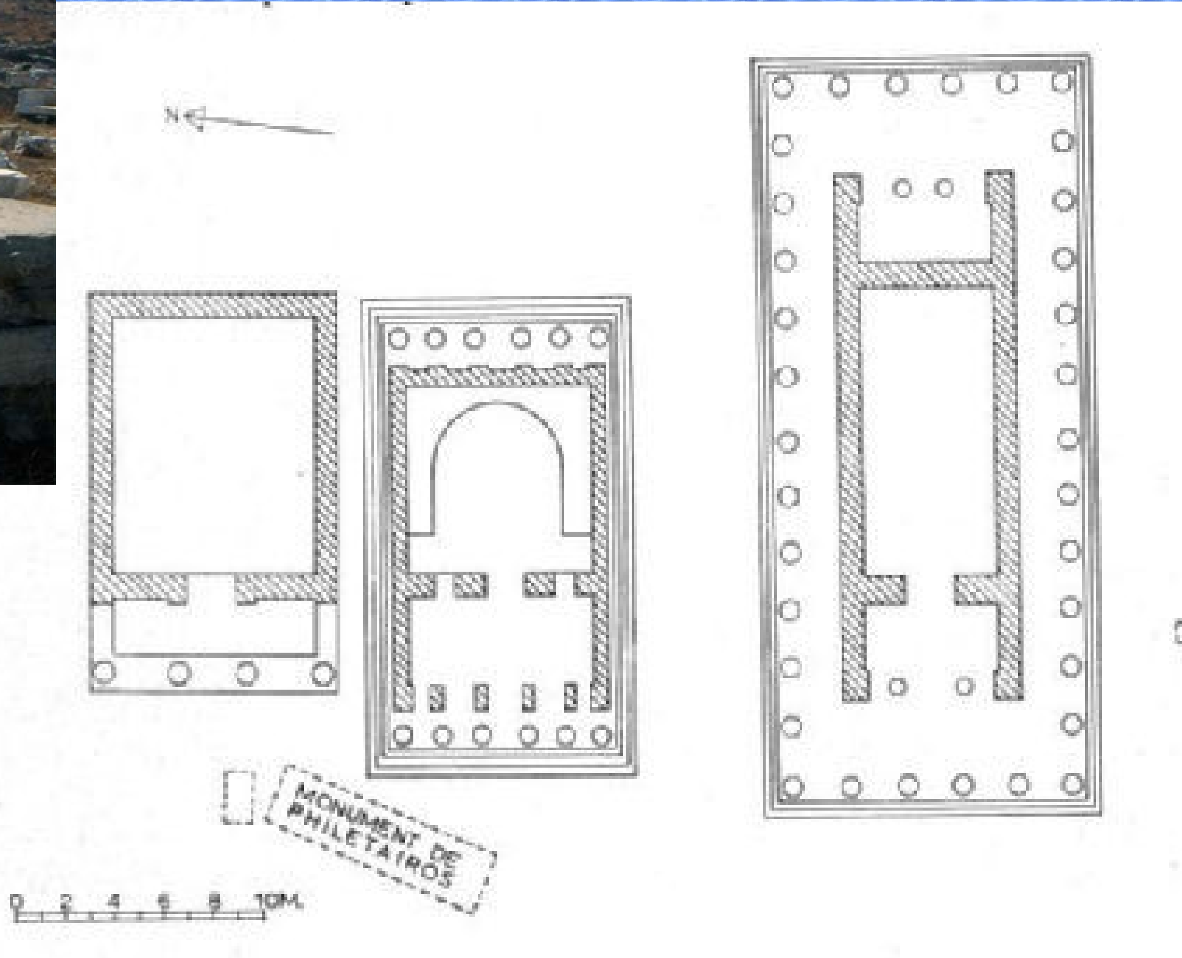
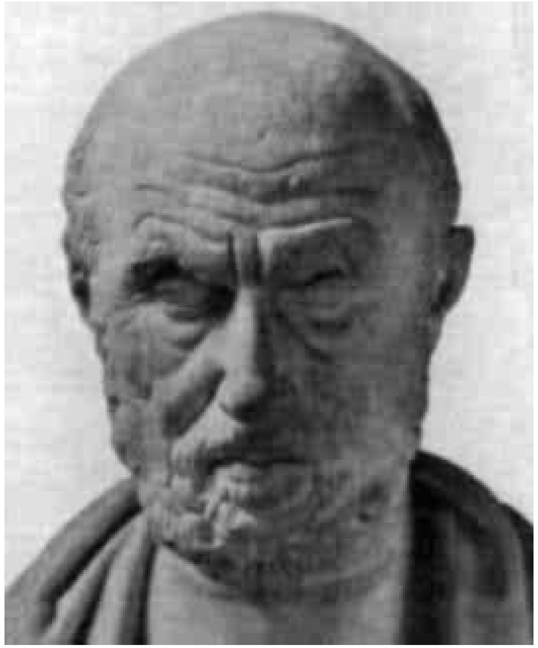
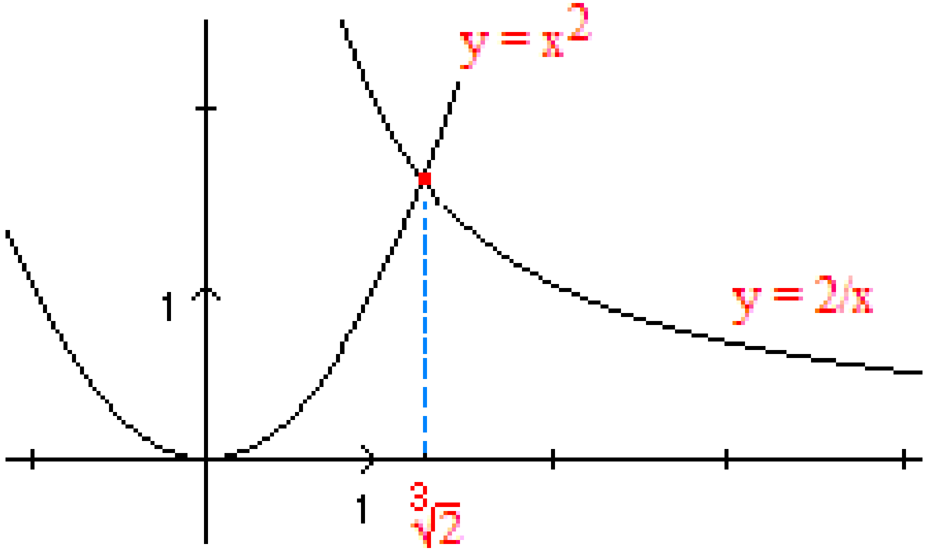



Fig. 22. — Les trois Temples d'Apollon.

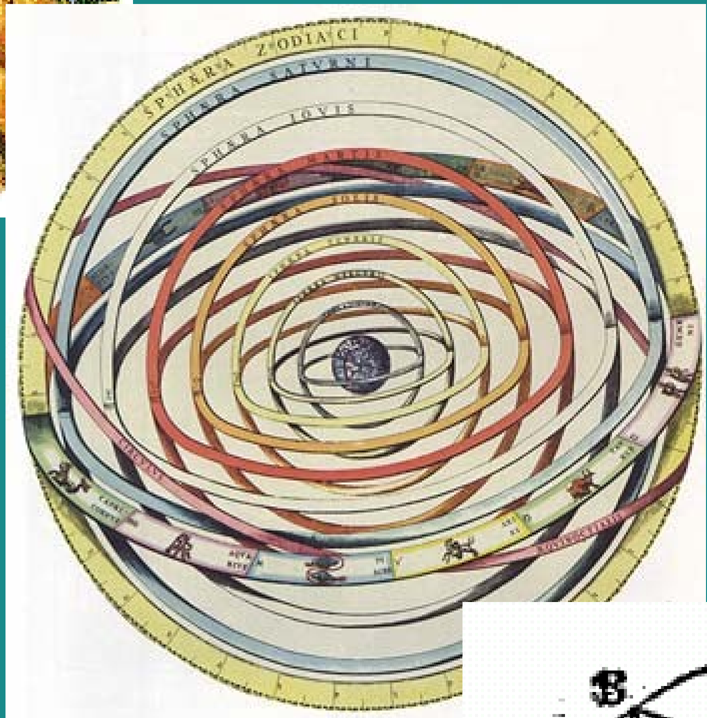


# Hippocrate de Chios (- 470, - 410)

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$




Ménechme
(- 380, - 320)



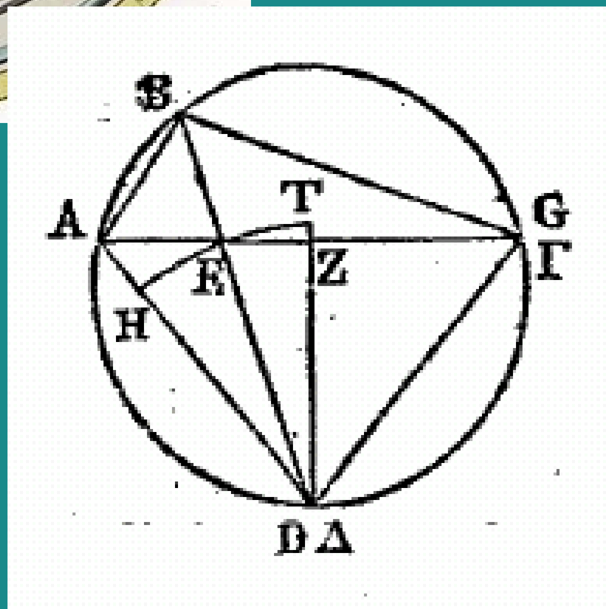
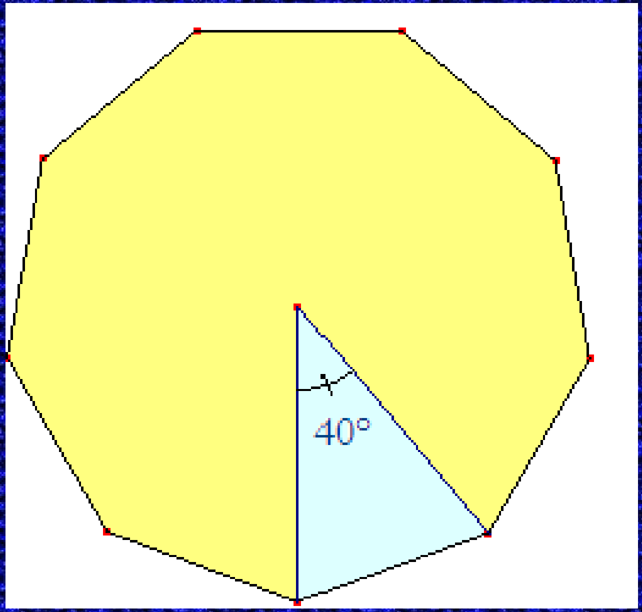




TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

| ARCS. | | CORDES. | | | TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degr. | Min. | Part. du Diam. | Prim. | Secon | Part. | Prim. | Secon. | Tierc. |
| 90 | 30 | 85 | 13 | 20 | 0 | 0 | 44 | 8 |
| 91 | 0 | 85 | 35 | 24 | 0 | 0 | 43 | 57 |
| 91 | 30 | 85 | 57 | 23 | 0 | 0 | 43 | 45 |
| 92 | 0 | 86 | 19 | 15 | 0 | 0 | 43 | 33 |
| 92 | 30 | 86 | 41 | 2 | 0 | 0 | 43 | 21 |
| 93 | 0 | 87 | 2 | 42 | 0 | 0 | 43 | 9 |
| 93 | 30 | 87 | 24 | 17 | 0 | 0 | 42 | 57 |
| 94 | 0 | 87 | 45 | 45 | 0 | 0 | 42 | 45 |
| 94 | 30 | 88 | 7 | 7 | 0 | 0 | 42 | 33 |
| 95 | 0 | 88 | 28 | 24 | 0 | 0 | 42 | 21 |
| 95 | 30 | 88 | 49 | 34 | 0 | 0 | 42 | 9 |
| 96 | 0 | 89 | 10 | 39 | 0 | 0 | 41 | 57 |
| 96 | 30 | 89 | 31 | 37 | 0 | 0 | 41 | 45 |
| 97 | 0 | 89 | 52 | 29 | 0 | 0 | 41 | 33 |
| 97 | 30 | 90 | 13 | 15 | 0 | 0 | 41 | 21 |
| 98 | 0 | 90 | 33 | 55 | 0 | 0 | 41 | 8 |
| 98 | 30 | 90 | 54 | 29 | 0 | 0 | 40 | 55 |
| 99 | 0 | 91 | 14 | 56 | 0 | 0 | 40 | 42 |
| 99 | 30 | 91 | 35 | 17 | 0 | 0 | 40 | 30 |
| 100 | 0 | 91 | 55 | 32 | 0 | 0 | 40 | 17 |
| 100 | 30 | 92 | 15 | 40 | 0 | 0 | 40 | 4 |
| 101 | 0 | 92 | 35 | 42 | 0 | 0 | 39 | 52 |
| 101 | 30 | 92 | 55 | 38 | 0 | 0 | 39 | 39 |
| 102 | 0 | 93 | 15 | 27 | 0 | 0 | 39 | 26 |
| 102 | 30 | 93 | 35 | 10 | 0 | 0 | 39 | 13 |
| 103 | 0 | 93 | 54 | 47 | 0 | 0 | 39 | 0 |
| 103 | 30 | 94 | 14 | 17 | 0 | 0 | 38 | 47 |
| 104 | 0 | 94 | 33 | 41 | 0 | 0 | 38 | 34 |
| 104 | 30 | 94 | 52 | 58 | 0 | 0 | 38 | 21 |
| 105 | 0 | 95 | 12 | 9 | 0 | 0 | 38 | 8 |
| 105 | 30 | 95 | 31 | 13 | 0 | 0 | 37 | 55 |
| 106 | 0 | 95 | 50 | 11 | 0 | 0 | 37 | 42 |
| 106 | 30 | 96 | 9 | 2 | 0 | 0 | 37 | 29 |
| 107 | 0 | 96 | 27 | 47 | 0 | 0 | 37 | 16 |
| 107 | 30 | 96 | 46 | 24 | 0 | 0 | 37 | 3 |
| 108 | 0 | 97 | 4 | 56 | 0 | 0 | 36 | 50 |
| 108 | 30 | 97 | 23 | 20 | 0 | 0 | 36 | 36 |
| 109 | 0 | 97 | 41 | 38 | 0 | 0 | 36 | 23 |
| 109 | 30 | 97 | 59 | 49 | 0 | 0 | 36 | 9 |
| 110 | 0 | 98 | 17 | 54 | 0 | 0 | 35 | 56 |
| 110 | 30 | 98 | 35 | 52 | 0 | 0 | 35 | 42 |
| 111 | 0 | 98 | 53 | 43 | 0 | 0 | 35 | 29 |
| 111 | 30 | 99 | 11 | 27 | 0 | 0 | 35 | 15 |
| 112 | 0 | 99 | 29 | 5 | 0 | 0 | 35 | 1 |
| 112 | 30 | 99 | 46 | 35 | 0 | 0 | 34 | 48 |

# Al-Biruni (973-1048) et l'ennéagone




$$x^3 = 3x - 1$$

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \ ?$$

$$\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \ ?$$

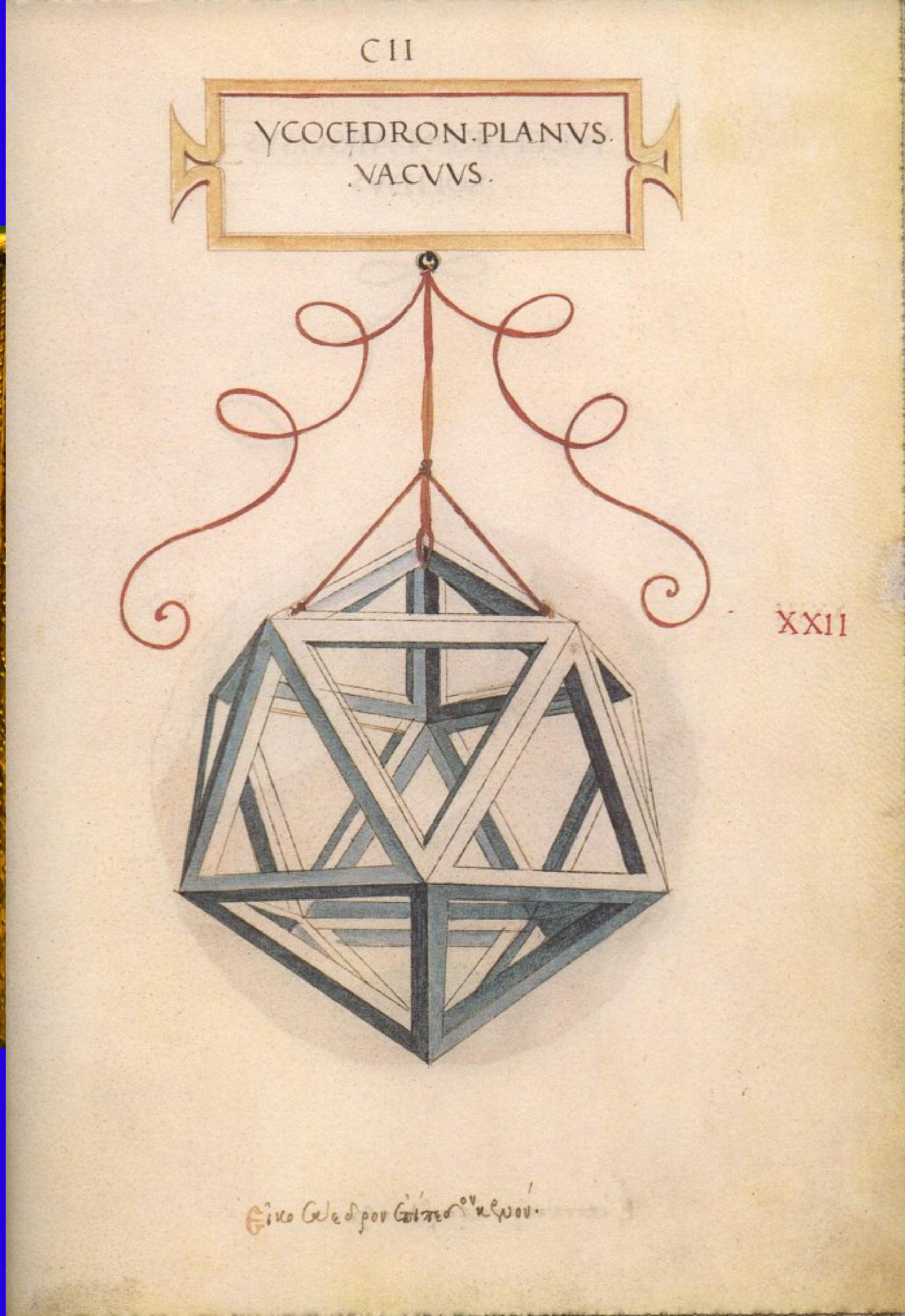
$$\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \ ?$$

$$\delta = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \ ?$$

$$\varepsilon = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \ ?$$

# Luca Paccioli
# (1526-1573)

$$R = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$



*Traité d'Abu Al-Fath 'Umar Ibn Ibrahim*
*AL-KHAYYAMI*

# *< SUR LA DIVISION D'UN QUART DE CERCLE >*

بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستوثق وعليه نستعين ١ – ظ

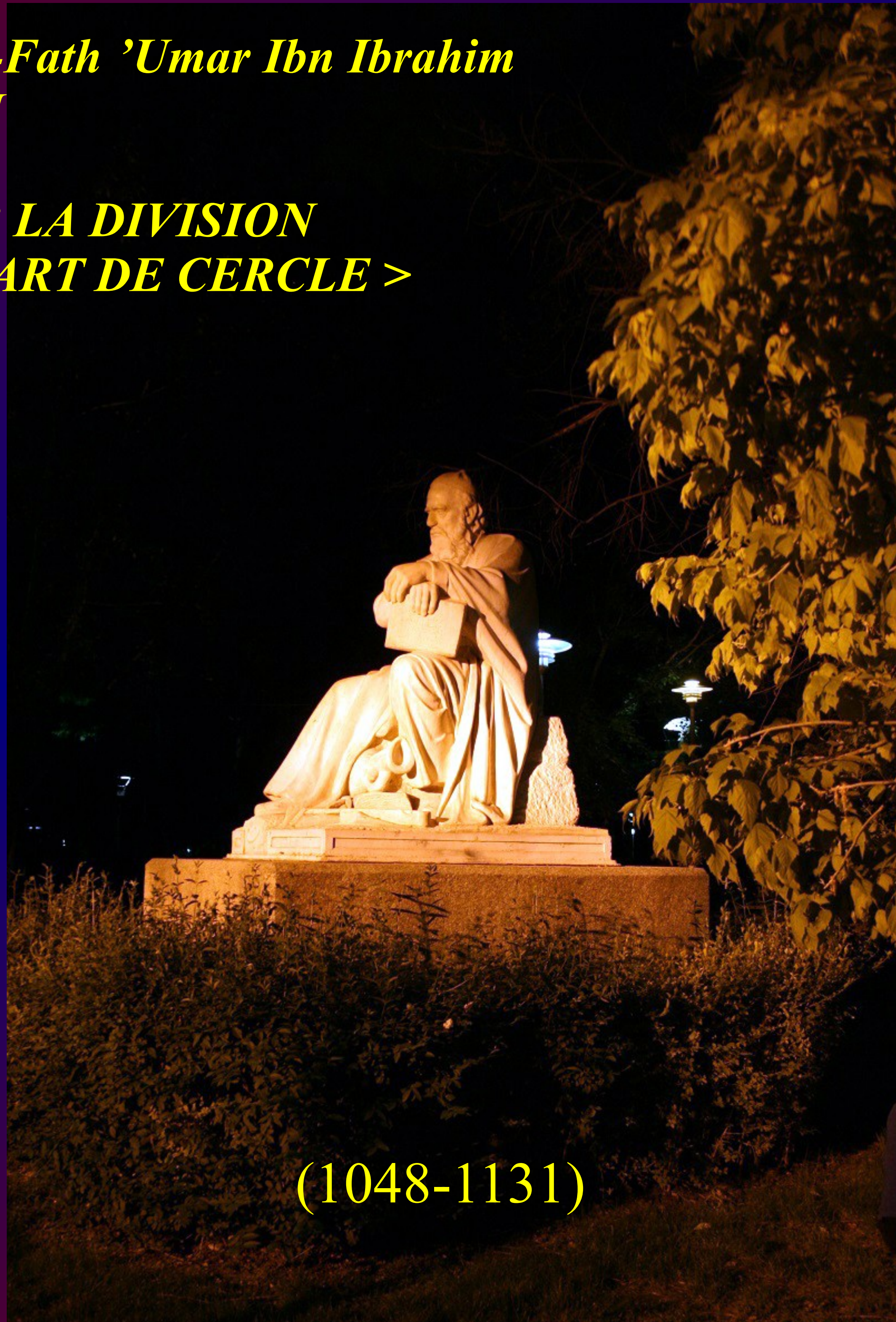
## هذه رسالة لأبي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي
## 〈في قسمة ربع الدائرة〉

نريد أن نقسم ربع دائرة ا ب من دائرة ا ب جـ د بقسمين على نقطة مثل ز ونخرج عمود ز ح على قطر ب د، فيكون نسبة ا هـ إلى ز ح كنسبة هـ ح إلى ح ب، وهـ مركز الدائرة وا هـ نصف القطر.

فإنا ننزل أنا قد فعلنا حتى يؤدي التحليل إلى أمر معلوم، ثم نركب على تلك الصفة. فنعيد دائرة ا ب جـ د ومركزها هـ، ونخرج ا جـ ب د يتقاطعان على زوايا قائمة، ونخرج عمود ز ح يكون نسبة ا هـ إليه كنسبة هـ ح إلى ح ب، ونخرج عمودي ك ز ط ط ب م ونتمم سطح ط ل بعد أن جعلنا خط ب م مثل ا هـ.

فلأن نسبة ا هـ إلى ز ح كنسبة هـ ح إلى ح ب، وب م مثل ا هـ، يكون نسبة ب م إلى ز ح 〈كنسبة هـ ح إلى ح ب〉 وضرب ب م في ح ب مساوياً

6 نصف القطر: مكررة – 10 ح ب: جـ ب – 13 وضرب: ضرب / ح ب: جـ ب.

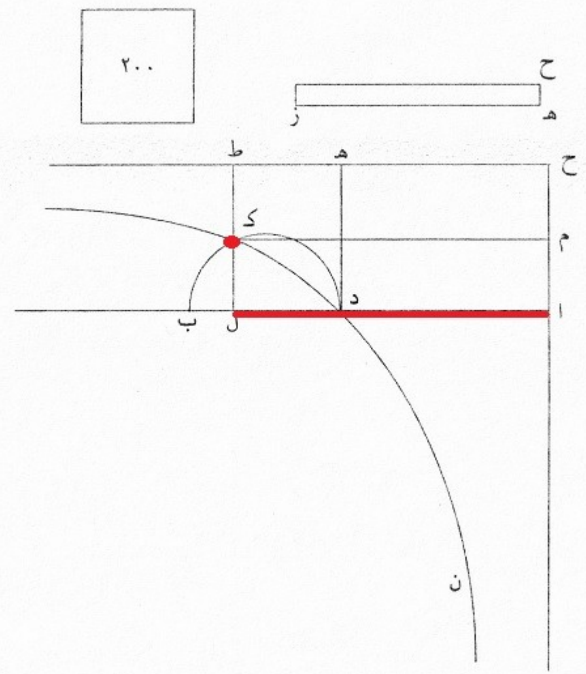


(1048-1131)

*"Je dis que le côté AL est le côté d'un cube tel que, si on lui ajoute deux cents fois son côté, il soit égal à vingt fois le carré de AL plus deux mille en nombre ."*

$$x^3 + 200\ x = 20\ x^2 + 2000$$



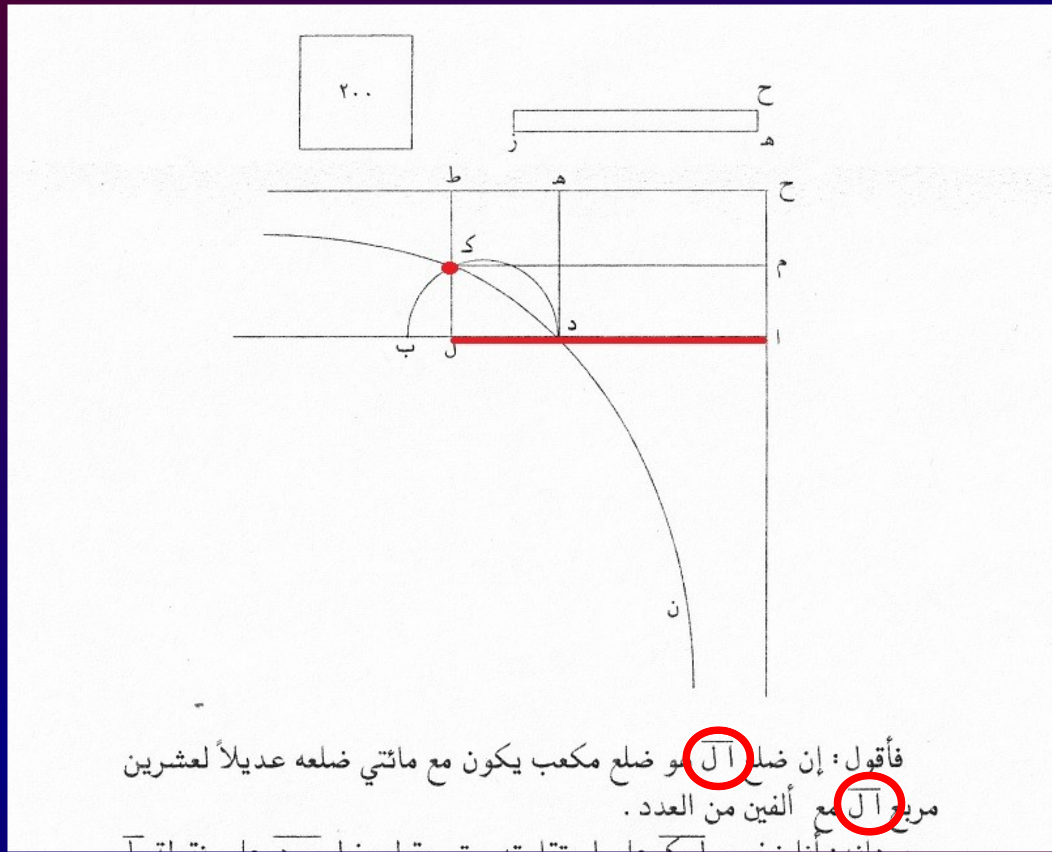



فأقول: إن ضلع ا ل هو ضلع مكعب يكون مع مائتي ضلعه عديلاً لعشرين مربع ا ل مع ألفين من العدد.

برهانه: أنا نخرج ل ك على استقامته حتى يقطع خط ح هـ على نقطة ط ونخرج ك م يوازي ا ل. فلأن ك ط يوازي د هـ وك م يوازي ا د، يكون سطح ا هـ القائم الزوايا مساوياً لسطح ك ح القائم الزوايا، لأن نقطتي ك د على محيط قطع زائد لا يلقاه خطا ا ح ح ط. وقد خرج من كل واحدة منها خطان إلى الخطين اللذين لا يلقيان ‹القطع الزائد› موازيين لنظيريهما الخارجين من النقطة الأخرى، وقد برهن عليه أبلونيوس الفاضل في شكل جـ من مقالة ب من كتاب *المخروطات*. ودائرة د ك ب معلومة الوضع لأن قطرها الذي هو د ب معلوم الوضع والقدر، وخطا ا ح ح ط معلوما الوضع، ونقطة ‹ن› معلومة الوضع، فيكون قطع ن د ك معلوم الوضع. ودائرة د ك ب معلومة الوضع، فيكون نقطة ك معلومة الوضع، وخط ك ل يكون معلوم

3 ح هـ: جـ هـ – 5 ك ح: ك حـ – 6 ا ح ح ط: ا جـ جـ ط – 10 ا ح ح ط: ا جـ جـ ط.

$$x^3 + 200\,x = 20\,x^2 + 2000$$




***"Celui qui veut connaître ceci par le calcul ne dispose d'aucun chemin pour y parvenir s'il exige de l'exactitude ; en effet dans les choses qui peuvent être déterminées par les sections coniques, on ne peut pas, en analysant, parvenir au calcul.***

***Mais si l'on se contente d'approximations, que l'on s'en remette aux tables des cordes de l'*****Almageste*****..."***

# Fibonacci (1180-1250)

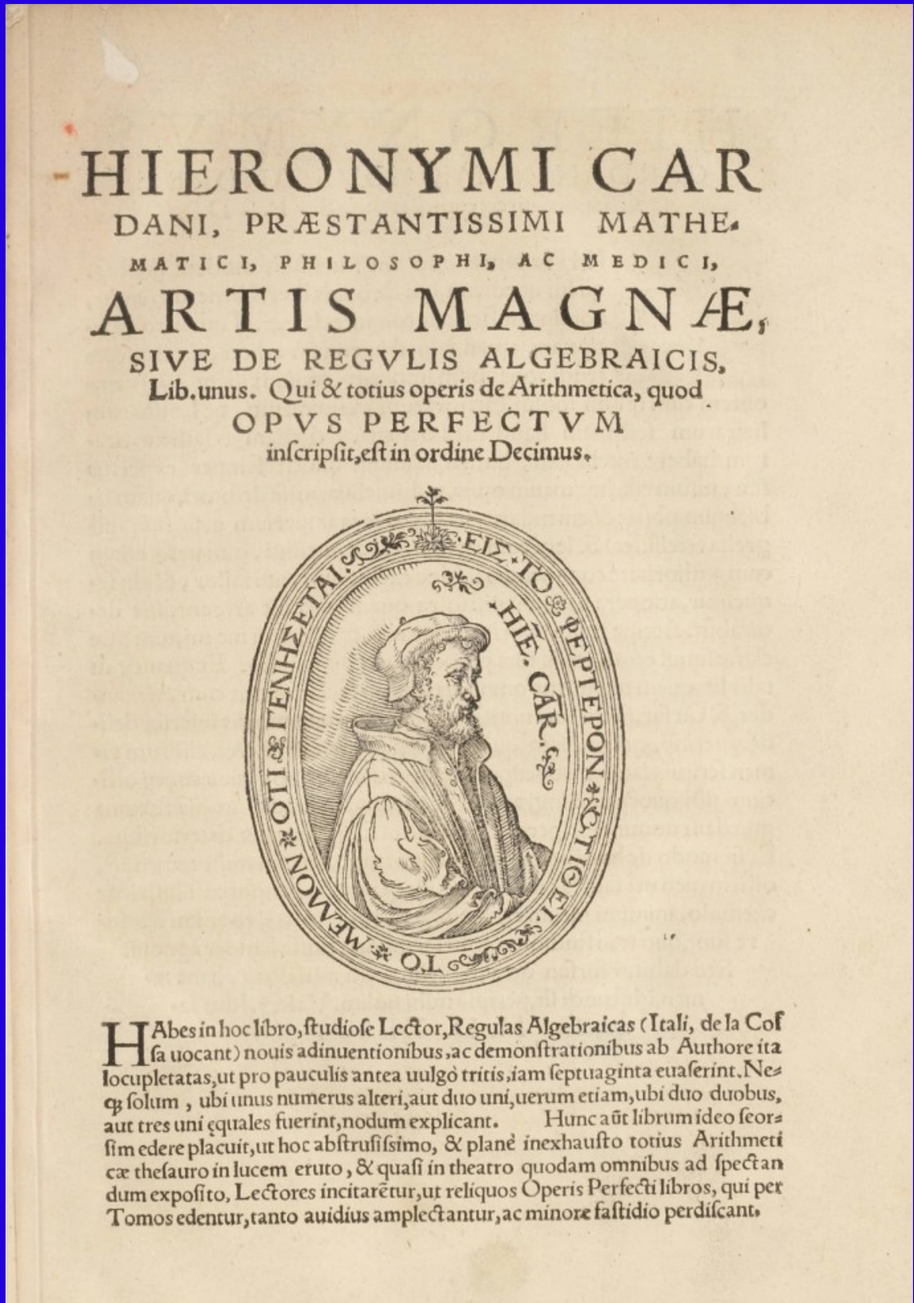
$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 10\alpha = 20$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \notin \mathbb{Q} \quad (1225)$$

$$\textit{mieux} \ : \ \alpha \neq \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

( Irrationnels d'Euclide,
*Éléments*, Livre X )

*"Cette équation ne peut être résolue par la géométrie plane,
car elle contient un cube.
Pour la résoudre, on doit faire appel aux coniques."*


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

(1543)

*« inspiré (?) par... »*
Niccolo Tartaglia (1499-1557)
Scipione Del Ferro (1465-1526)

Gerolamo Cardano
(1501-1576)

$$x^3 + 6x - 20 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

$$x = \ldots 2 \ [\,!\,!\,!\,!\,]$$


201

L'ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DI RAFAEL BOMBELLO
BOLOGNESE.

Libro Secondo.

SI marauigliaranno forſe alcuni, che contra l'antico uſo de Scrittori Italiani, i quali ſino à queſto giorno hanno ſcritto di queſta ſcientia dell'Arimetica, quando gli è occorſo di trattare di quantità incognita: eſsi ſempre l'hanno nominata ſotto queſta uoce di (Coſa) come voce commune à tutte le coſe incognite, è d'io chiami hora queſte quantità (Tanti) ma chi bene conſiderarà il fatto, conoſcerà, che più ſe le conuiene queſta uoce di (Tanto), che di (coſa), perche ſe diremo (Tanto) è uoce appropriata à quantità di numeri, ilche non ſi può dire di (coſa) eſſendo quella uoce uniuerſaliſsima, e cõmune ad ogni ſoſtantia coſi ignota come nota. In oltre io trouo, che Diofante Auttor Greco coſi la noma, il ch'è di non piciolo

# Rafaele Bombelli (1526-1573)

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \qquad = \ldots 4 \ [!!!!]$$

$$\textit{via} \quad 2 + 11\sqrt{-1} = \left(2 + b\sqrt{-1}\right)^3$$

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \ ?$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 3$$

$$\alpha^2 - 1 = 2\sqrt{2}\alpha$$

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \ ?$$

$$\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \ ?$$

$$\delta = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \ ?$$

$$\varepsilon = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \ ?$$

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \qquad \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \qquad \beta^6 - 6\beta^4 - 4\beta^3 + 12\beta^2 - 24\beta - 16 = 0$$

$$\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \qquad \gamma^4 - 4\gamma^2 + 1 = 0$$

$$\delta = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \qquad \delta^6 - 6\delta^4 + 12\delta^2 + 6 = 0$$

$$\varepsilon = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \qquad \varepsilon^6 - 4\varepsilon^3 + 2 = 0$$

$$\delta = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$$

$$\delta = \frac{p}{q}$$


$$q^{6} = 0$$

$$p^{6} - 6p^{4}q^{2} + 12p^{2}q^{4} = -6q^{6} \qquad p \mid -6q^{6}, \;\; p \wedge q = 1 \Rightarrow p \mid -6$$

$$-6p^{4}q^{2} + 12p^{2}q^{4} + 6q^{6} = -p^{6} \qquad q \mid p^{6}, \;\; p \wedge q = 1 \Rightarrow q \mid 1$$

$$p \in \{ \pm 6, \; \pm 3, \; \pm 2, \; \pm 1 \}, \;\; q \in \{ \pm 1 \}$$

$$\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \qquad p^{6} - 6p^{4}q^{2} - 4p^{3}q^{3} + 12p^{2}q^{4} - 24pq^{5} - 16q^{6} = 0$$

$$\beta = \frac{p}{q} \in \{ \pm 16, \; \pm 8, \; \pm 4, \; \pm 2, \; \pm 1 \}$$

# ELEMENS
## DES
# MATHEMATIQUES,
## OU
## PRINCIPES GENERAUX
## DE
# TOUTES LES SCIENCES,
## QUI ONT LES GRANDEURS POUR OBJET.

*CONTENANT UNE METHODE COURTE ET FACILE pour comparer ces grandeurs & pour découvrir leurs rapports par le moyen des caracteres des nombres, & des lettres de l'alphabeth. Dans laquelle les choses sont démontrées selon l'ordre Geometrique, & l'Analyse renduë beaucoup plus facile, & traittée plus à fond que l'on n'a fait jusqu'ici.*

par Jean Prestet.


V. + 841.


A PARIS,
Chez ANDRÉ PRALARD, Marchand Libraire, ruë Saint Jacques, à l'Occasion.

M. DC. LXXV.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.






J'écris $3qx^6 + 3qqx^3 = f^3$. Multipliant donc chacun de ces membres par $q$, j'ay pour troisiéme egalité $3qqx^6 + 3q^3x^3 = f^3q$, & cherchant par le moyen de cette egalité la valeur de $qq$ quarré de $q$, je trouve $qq = \frac{f^3q - 3q^3x^3}{3x^6}$. Et mettant cette valeur de $qq$ dans la seconde egalité $3qx^6 + 3qqx^3 = f^3$, il vient $3qx^6 - q^3 + \frac{f^3q}{x^3} = f^3$. Et le tout estant multiplié par $x^3$, l'egalité sera $3qx^9 - q^3x^3 + f^3q = f^3x^3$. D'où je tire $q = \frac{f^3x^3 + q^3x^3}{3x^9 + f^3}$, & pour abreger je suppose $f^3x^3 + q^3x^3 = g^3$, & $3x^9 + f^3 = l^3$, & j'écris $q = \frac{g^3}{l^3}$. Cubant ensuite chacun de ces deux membres, j'ay $q^3 = \frac{g^9}{l^9}$. Aprés quoy remettant à la place de $g^9$ & de $l^9$ les grandeurs qui leur sont egales, & disposant par ordre les termes de l'egalité, l'on aura enfin une egalité du 36ᵉ degré, mais qui passera seulement pour une du 12ᵉ, à cause que l'inconnuë de chaque terme à un autre diminuë de trois degrez.

### REGLE GENERALE.
*Pour trouver les racines commensurables d'une egalité proposée, & qui soit sans fraction.*

1°. Si l'egalité proposée est numerique, & que les grandeurs connües de ses termes renferment quelques grandeurs incommensurables, l'on en delivrera l'egalité par la regle precedente, LXXIII.

2°. L'on examinera par ordre tous les diviseurs du dernier terme, & l'on verra successivement si l'inconnüe + ou — quelqu'un de ces diviseurs peut diviser sans reste l'egalité proposée. Ce qui donnera toûjours quelque racine de l'egalité, si elle en a de commensurable.

*Premier Exemple.*

Soit proposée l'egalité de trois degrez $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, Pour connoistre si elle a quelque racine commensurable, l'on prend tous les diviseurs du dernier terme 64, qui sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 & 64. Ensuite l'on examine par ordre chacune des egalitez $yy - 1 = 0$, $yy + 1 = 0$; $yy - 2 = 0$, $yy + 2 = 0$; $yy - 4 = 0$, $yy + 4 = 0$; $yy - 8 = 0$, $yy + 8 = 0$; $yy - 16 = 0$; Or trouvant que cette derniere $yy - 16 = 0$, divise exactement la proposée, l'on connoist aussi que 16 en est une racine commensurable, & la division reduit l'egalité proposée à cette autre $y^4 + 8yy + 4 = 0$, qui n'a que deux degrez. Et parceque $yy - 16 = 0$, Donc $yy = 16$, & $y = 4$. Connoissant la valeur de la racine $yy$, l'on connoist aussi celle de $y$.

*Second Exemple.*

Soit proposée l'egalité
$$\begin{array}{lllll} y^6 & + aay^4 & - a^4yy & - a^6 & = 0, \\ & - 2cc & + c^4 & - 2a^4cc & \\ & & & - aac^4 & \end{array}$$
son dernier terme peut estre divisé sans fraction par $a$, $aa$, $aa + cc$, $a^3 + acc$, & encore par d'autres. Mais il suffit de ne considerer parmy tous ces diviseurs que ceux qui ont un nombre de dimension egal à celuy de la racine inconnüe de

estoient $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere estoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Cōment on rend la quantité connuë de l'vn des termes d'vne Equation esgale a telle autre qu'on veut.

Cete operation peut aussy seruir pour rendre la quantité connuë de quelqu'un des termes de l'Equatiō esgale a quelque autre donnée, comme si ayant

$$x^3 * -bbx + c^3 \infty 0$$

On veut auoir en sa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connuë, du terme qui occupe la troisiesme place, a sçauoir celle qui est icy $bb$, soit $3aa$, il faut supposer $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis escrire $y^3 * -3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$.

Que les racines, tant vrayes que fausses peuuent estre reelles ou imaginaires.

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est a dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

quand pour trouuer la construction de quelque sme, on vient a vne Equation, en laquelle la quan connuë a trois dimensions; premierement si les tés connuës, qui y sont, contienent quelques es rompus, il les faut reduire a d'autres entiers, par iplication tantost expliquée; Et s'ils en contie sours, il faut aussy les reduire a d'autres ratio utant qu'il sera possible, tant par cete mesme multiplication,

DISCOURS

DE LA METHODE

Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.

PLUS

LA DIOPTRIQVE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

*Qui sont des essais de cete* METHODE.

A LEYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

CIƆ IƆ C XXXVII.

*Auec Priuilege.*



tiplication, que par diuers autres moyens, qui sont assés faciles a trouuer. Puis examinant par ordre toutes les quantités, qui peuuent diuiser sans fraction le dernier terme, il faut voir, si quelqu'vne d'elles, iointe auec la quantité inconnuë par le signe + ou -, peut composer vn binome, qui diuise toute la somme; & si cela est le Problesme est plan, c'est a dire il peut estre construit auec la reigle & le compas; Car oubien la quantité connuë de ce binosme est la racine cherchée; oubien l'Equation estant diuisée par luy, se reduist a deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouuer aprés la racine, par ce qui a esté dit au premier liure.

Par exemple si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 \infty 0.$$

Le dernier terme, qui est 64, peut estre diuisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; C'est pourquoy il faut examiner par ordre si cete Equation ne peut point estre diuisée par quelqu'vn des binomes, $yy - 1$ ou $yy + 1$, $yy - 2$ ou $yy + 2$, $yy - 4$ &c. & on trouue qu'elle peut l'estre par $yy - 16$, en cete sorte.

$$\begin{array}{llll} +\,y^6 & -\,8y^4 & -\,124yy & -\,64 \infty 0 \\ -\,1y^6 & -\,8y^4 & -\,4yy & \\ & & & -16 \\ 0 & -\,\frac{16y^4}{16} & -\,\frac{128yy}{16} & \\ \hline & +\,y^4 & +\,8yy & +\,4 \infty 0. \end{array}$$

Ie commence par le dernier terme, & diuise $-64$ par $-16$, ce qui fait $+4$, que i'escris dans le quotient, puis ie multiplie $+4$ par $+yy$, ce qui fait $+4yy$; c'est pourquoy i'escris $-4yy$ en la somme, qu'il faut diuiser. car il y faut

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Viète (1593)

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots$$

Wallis (1655)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Euler (1734)
*"problème de Bâle "*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Gregory,
Leibniz (1670)

… mais aussi Mādhava ( ≈ 1340 – ≈ 1425 )
ou ses disciples : école du Kerala (Inde du Sud)

# TRAITÉ

## DE LA RÉSOLUTION

DES

## ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

## DE TOUS LES DEGRÉS.

---

### CHAPITRE PREMIER.

*Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entière la plus approchée de chacune de ses racines réelles.*

1. *Théorème I.* Si l'on a une équation quelconque, et que l'on connaisse deux nombres tels qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent des résultats de signes contraires, l'équation aura nécessairement au moins une racine réelle dont la valeur sera entre ces deux nombres.

Ce théorème est connu depuis long-temps, et l'on a coutume de le démontrer par la théorie des lignes courbes; mais on peut aussi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette sorte. Soit $x$ l'inconnue de l'équation, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., ses racines, l'équation se réduira, comme l'on sait, à cette forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots=0.$$

$\sqrt{\pi}$ *est il **rationnel** ?*

$\sqrt{\pi}$ *est il **constructible** ?*

# LETTRE DE CONDORCET

## A L'ASSEMBLÉE NATIONALE.

Paris, 28 janvier 1791.

Monsieur le président,

L'Assemblée nationale a renvoyé à l'examen de l'Académie une solution du problème de la trisection de l'angle, par M. Guérin.

En 1775, l'Académie a pris et rendu publique la résolution de ne plus examiner ni trisection de l'angle, ni duplication du cube, ni quadrature du cercle, ni mouvement perpétuel.

Les problèmes de la trisection de l'angle et de la duplication du cube sont résolus depuis deux mille ans, et, si l'on cherche encore à les résoudre, ce n'est que par une ignorance absolue de ces questions. L'impossibilité de trouver la quadrature du cercle est aussi démontrée que peut l'être une chose de ce genre, et celle d'un mouvement perpétuel l'est également. Ainsi, en renonçant à examiner les prétendues solutions nouvelles de tous ces problèmes, l'Académie a été bien sûre de n'exclure aucun travail utile.

Le motif qui l'a déterminée à les examiner pendant longtemps, a été uniquement la crainte de paraître adopter en corps une opinion, et elle a mieux aimé





employer quelquefois de la manière la plus inutile le temps des académiciens, que d'avoir l'air de donner son jugement comme une règle éternelle. Mais le nombre de ceux qui consument en pure perte une partie de leur vie à ces vaines recherches, dont tout le fruit est de nuire à leur fortune, et trop souvent d'altérer leur raison, l'a déterminée à prendre une résolution qu'elle a crue propre à les détourner de cette occupation. Elle a craint que si elle continuait à examiner leur solution, elle pût être accusée de les encourager à s'en occuper, et qu'elle ne se rendît en quelque sorte complice des malheurs qui leur arrivent.

Fidèle à ce principe, l'Académie n'a pas cru devoir faire une exception pour l'ouvrage de M. Guérin; son examen n'aurait servi qu'à montrer en quoi consistait l'erreur de cette prétendue solution; et peut-être, en apprenant qu'elle s'occupait encore de ces questions, d'engager quelques autres personnes à se livrer à des espérances de succès, que l'expérience a prouvé être rarement sans danger.

Je suis avec respect, Monsieur le président,

Votre très-humble et très-obéissant serviteur.

*Signé*, Condorcet.



# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   **2.2 Des Arts Florissants…**
   2.3 ...Au Cantor

3. L'Outil des Grandes Découvertes

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

## Partie II : Étude de Cas. Le Nombre *e*, niveau lycée

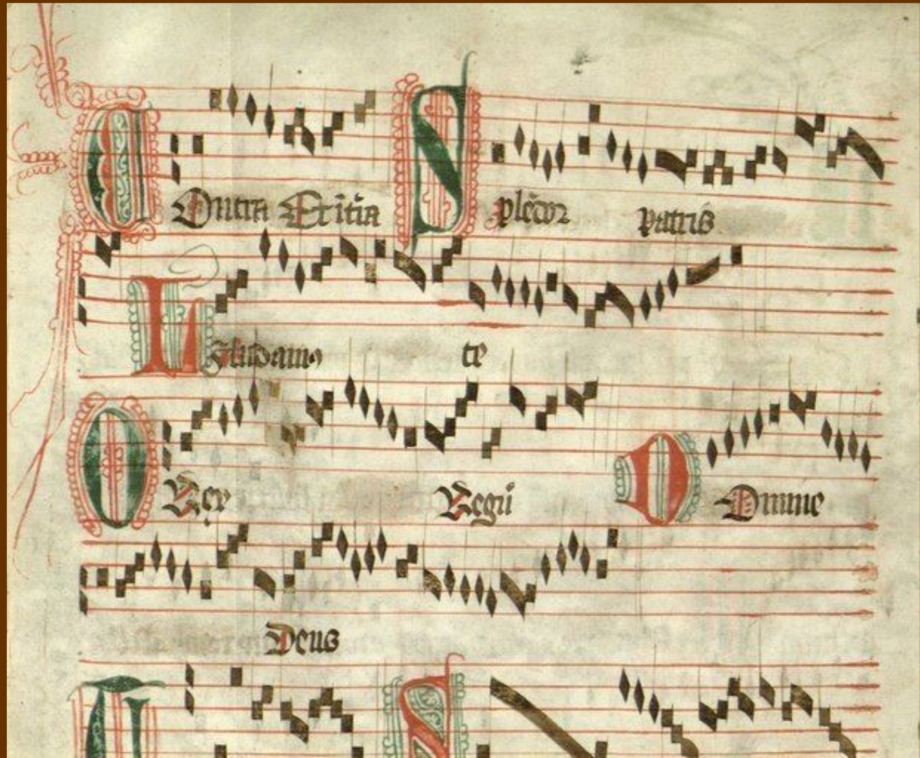
- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes. Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**

( 1291-1361)

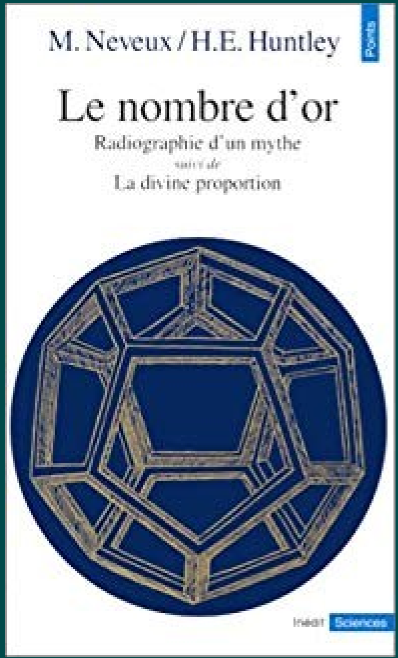


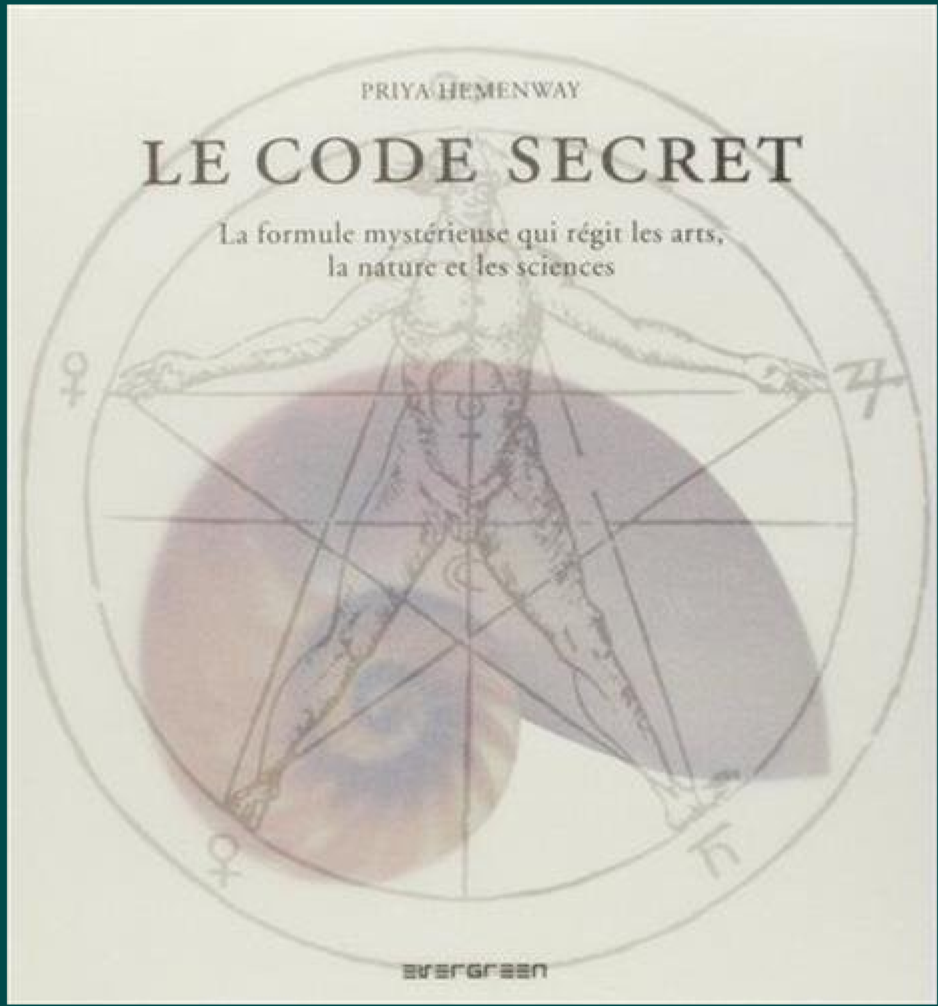

( 1288-1344)

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{p} \neq 2^{n} \text{¿}$$

(1342)

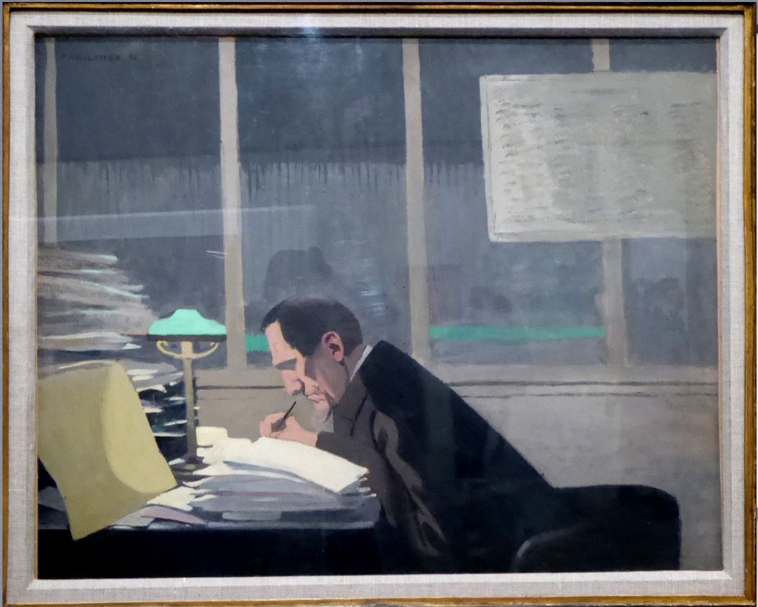
$$3^{p} - 2^{q} = 1$$


M. Neveux / H.E. Huntley
Points
Le nombre d'or
Radiographie d'un mythe
suivi de
La divine proportion
Inédit Sciences


PRIYA HEMENWAY
LE CODE SECRET
La formule mystérieuse qui régit les arts,
la nature et les sciences
evergreen

*"Rien de bien mystérieux. Le terme même était loin d'être nouveau.*
*Il s'inspirait simplement de la définition du nombre d'or,*
*rapport entre la diagonale et le carré. "*

Jacques Villon,
à propos de l'exposition *la Section d'Or* (1912)



HENNIQUE (Léon).

RELATE des cocuages bourgeois et les souvenirs ternes de son enfance de fils de gradé aux colonies. S'exprime couramment dans le pur dialecte médanien. A l'air de suivre ses obsèques.

HENRY (Charles).

DÉCLARE sans sourciller dans un article esthétique: — « Le rythme est un changement de direction » déterminant, sur une circonférence dont le centre » est au centre du changement, une division géométri- » que possible aux termes de la théorie de Gauss. »

Mesure au dynamographe la valeur d'une métaphore de Mallarmé, commente au tableau noir les vers de Jules Laforgue, trace des graphiques de maladies, réduit en équations les tableaux de Degas. Prouverait que des relations rigoureuses lient la solubilité du nitrate de plomb à la révolte des Taïpings.

---

INTRODUCTION

A UNE

# ESTHÉTIQUE SCIENTIFIQUE

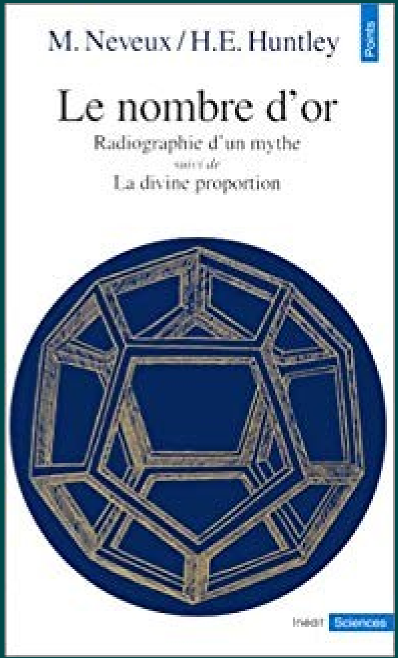




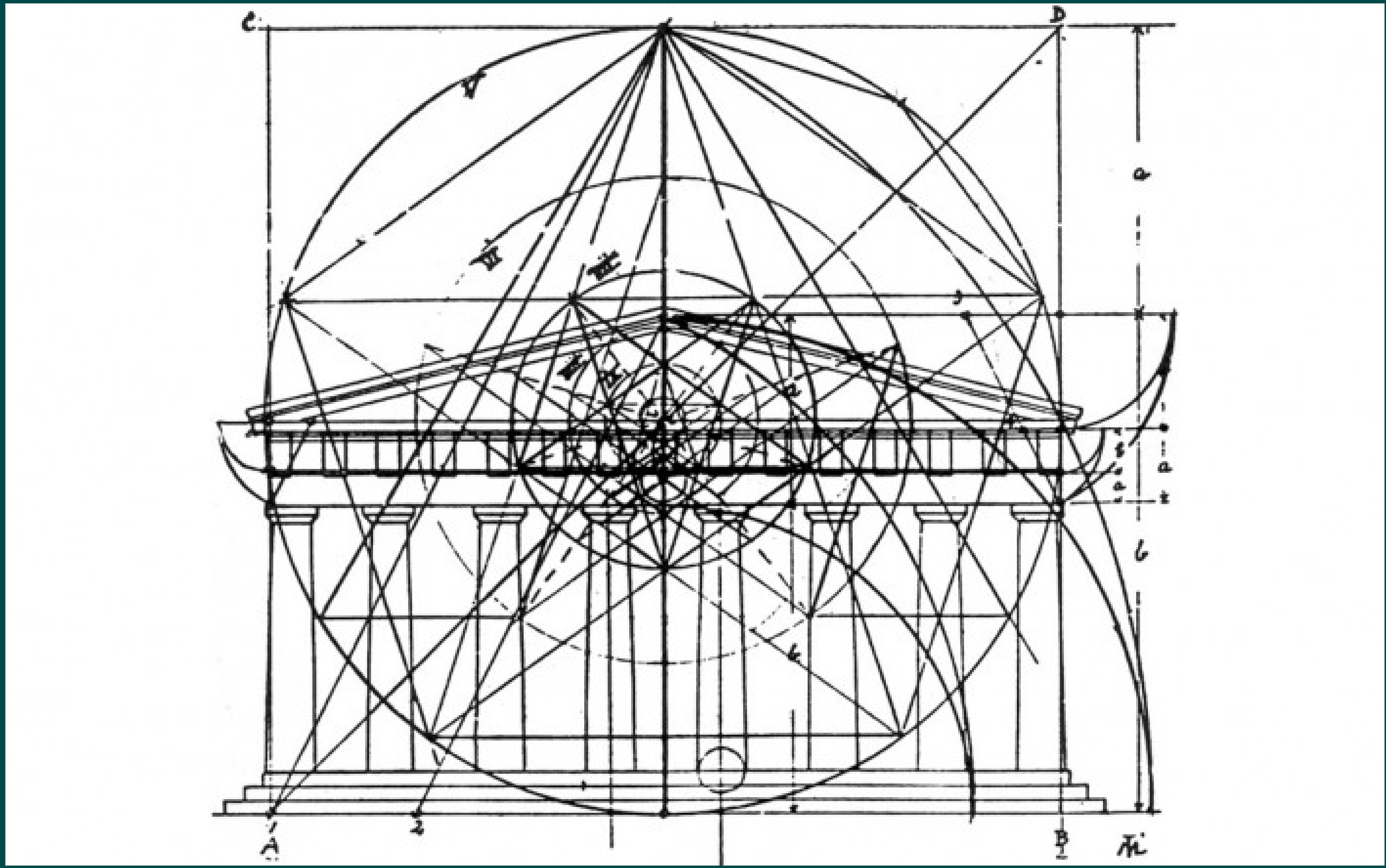
PAR

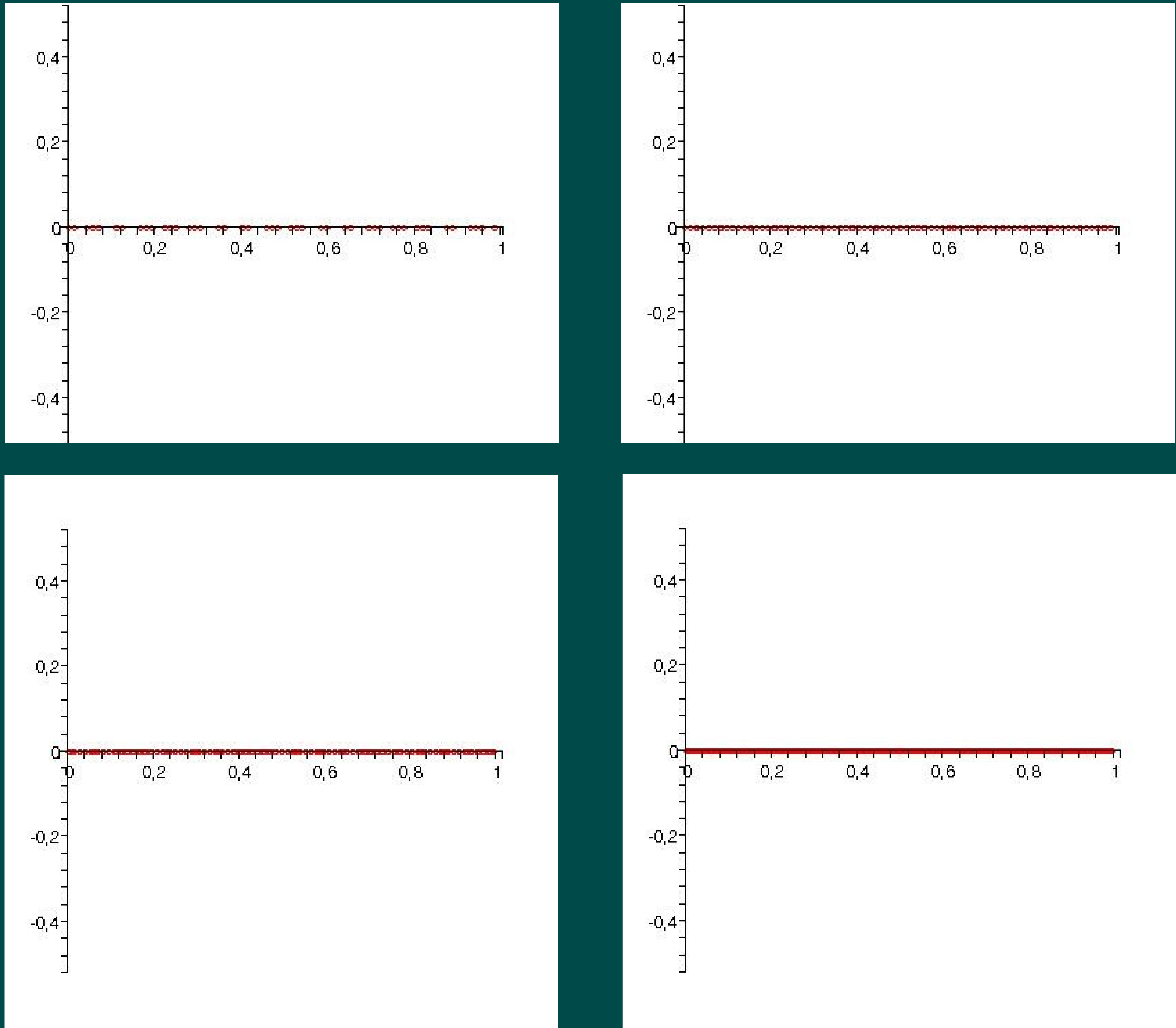
M. CHARLES HENRY
BIBLIOTHÉCAIRE DE L'UNIVERSITÉ A LA SORBONNE
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

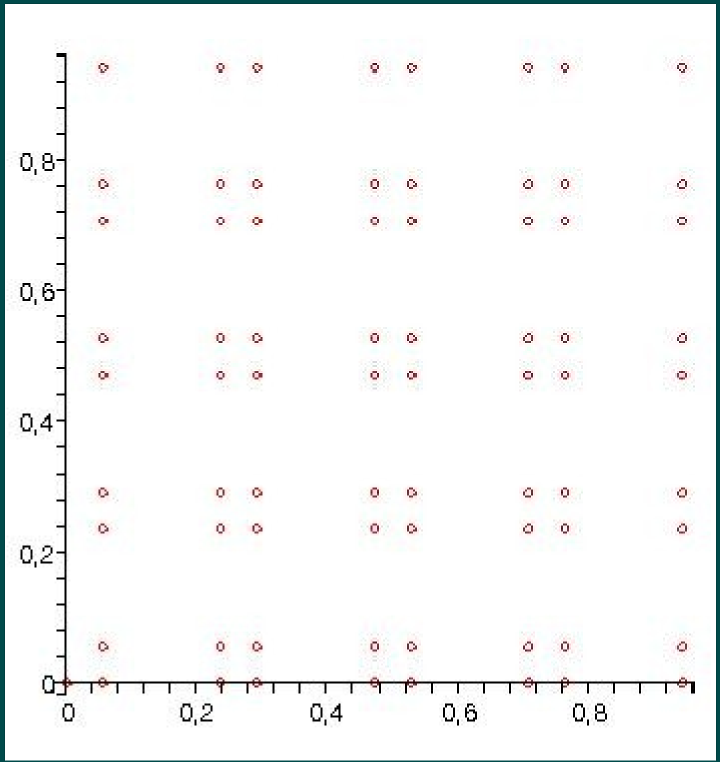
PARIS
A LA *REVUE CONTEMPORAINE*
2, RUE DE TOURNON, 2
25 Août 1885

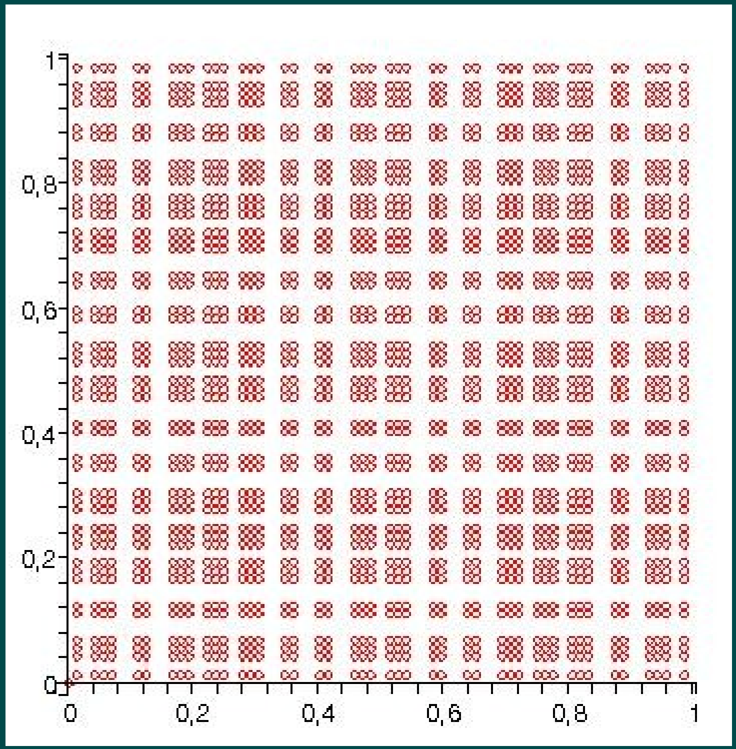


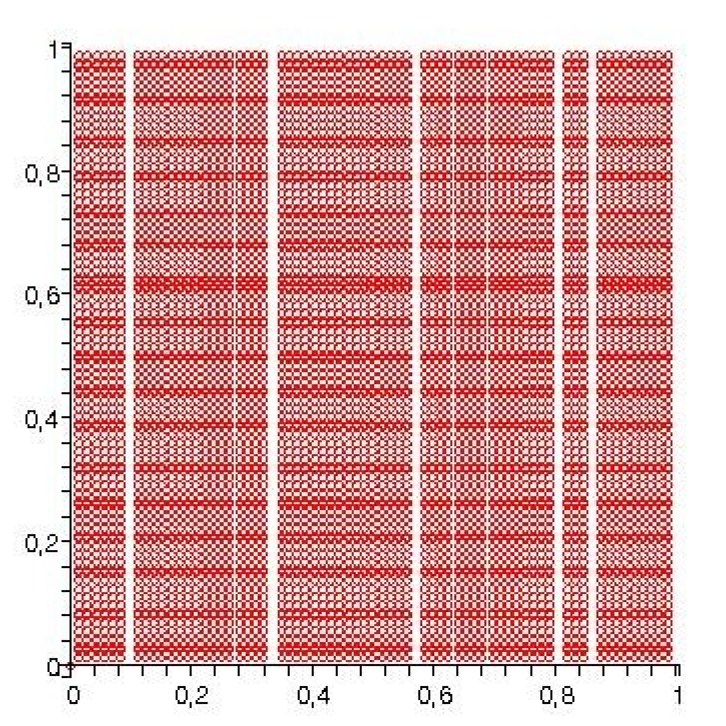

# Adolf Zeising (1810-1876)

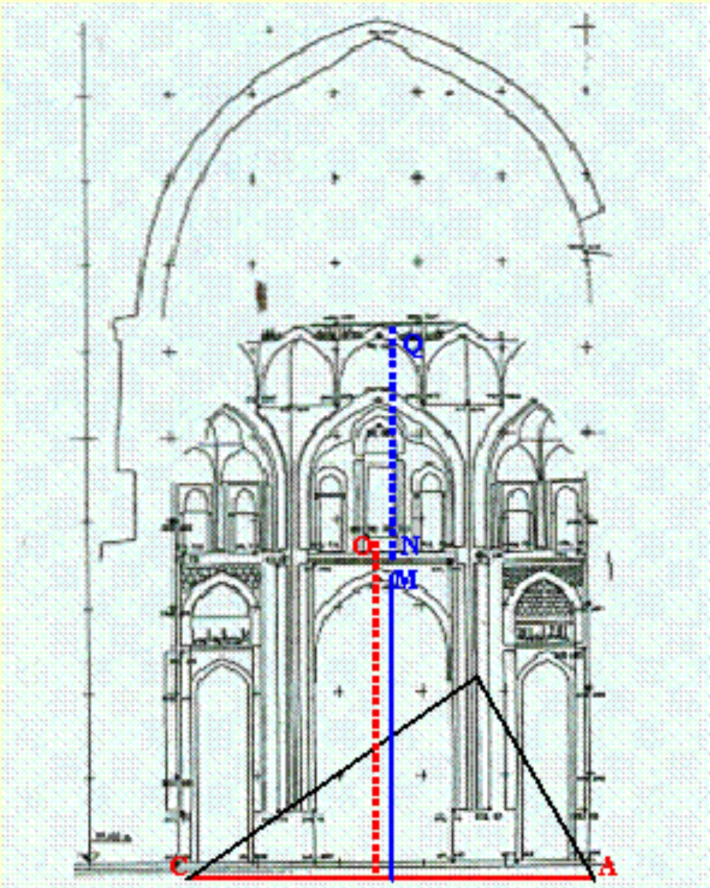



0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1


0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1



Q
O
N
M
C
A
G

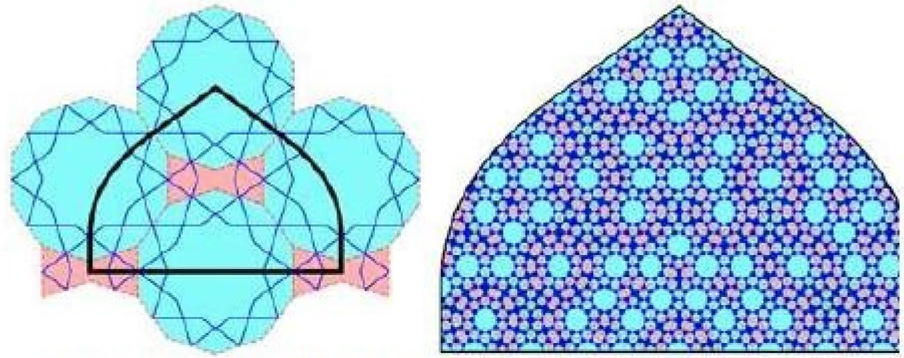



**Figure 24:** Same *Spandrel from the Darb-i Imam Shrine, Showing Two Successive Generations of Girih Tiles, Drawings by Peter J. Lu, see [3]*

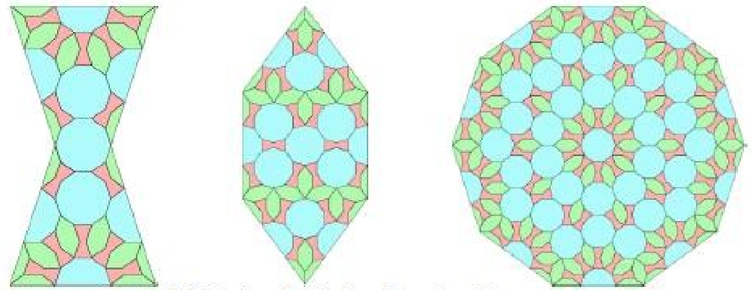


**Figure 25:** *Subdivision Rule for Bowtie, Hexagon, and Decagon, Drawings by Peter J. Lu, see [2]*

| | p | h | d |
|---|---|---|---|
| P | 14 | 14 | 6 |
| H | 22 | 22 | 10 |
| D | 80 | 80 | 36 |

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   2.2 Des Arts Florissants…
   **2.3 ...Au Cantor**

3. L'Outil des Grandes Découvertes

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

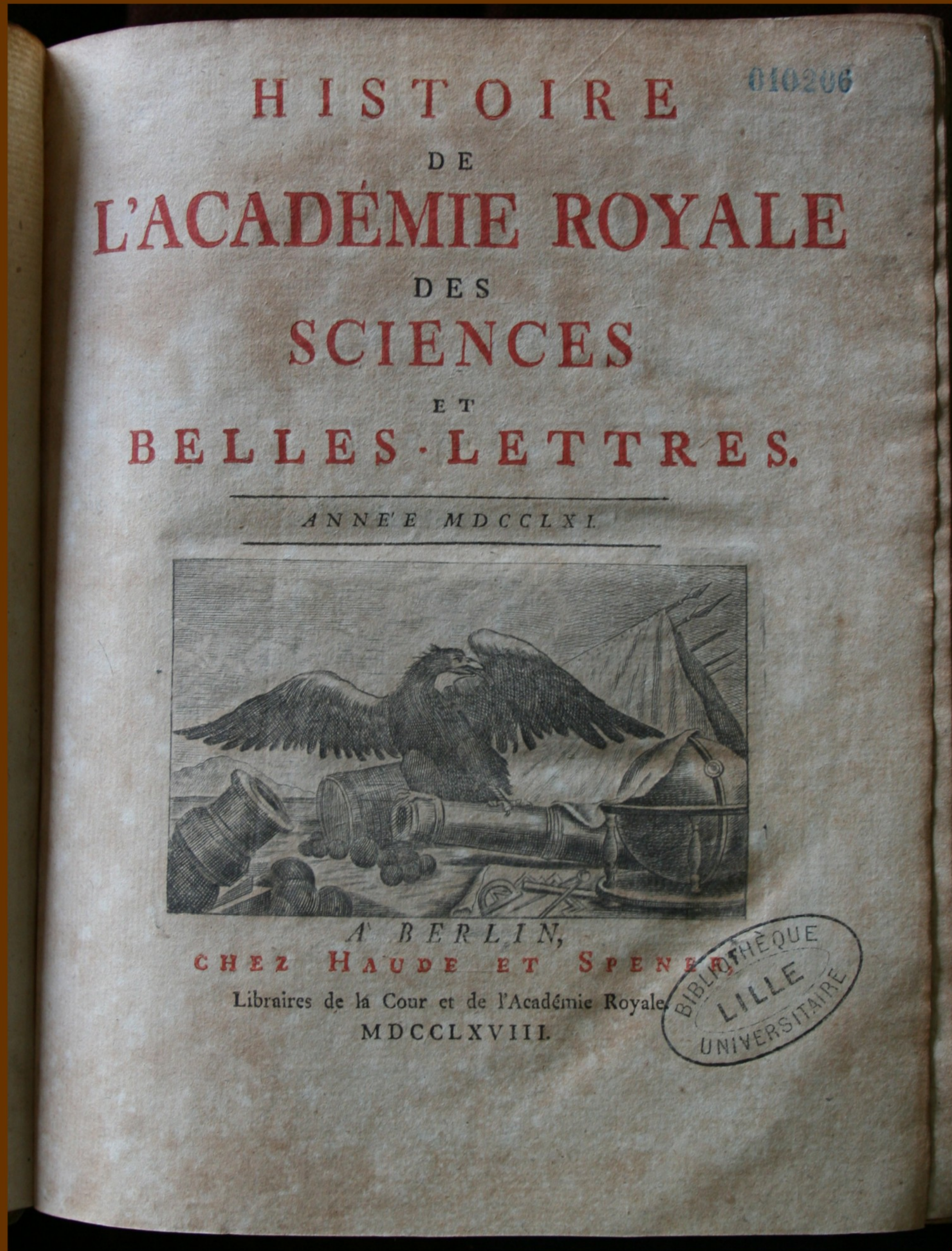
## Partie II : Étude de Cas. Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes. Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXI.

A BERLIN,
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour et de l'Académie Royale.
MDCCLXVIII.

& réciproquement

$$u = v + \tfrac{2}{3}v^3 + \tfrac{2}{3}v^5 + \tfrac{2\cdot4\cdot4}{3\cdot1\cdot5}v^7 + \&c.$$

Ces deux ſuites ne different que par rapport aux ſignes, les coefficiens & les expoſans étant les mêmes. Si dans la premiere de ces ſuites on poſe

$$u = v\sqrt{-1},$$

on trouve

$$v = \sqrt{-1}\,.\,(v + \tfrac{2}{3}v^3 + \tfrac{2}{3}v^5 + \tfrac{2\cdot4\cdot4}{3\cdot1\cdot5}v^7 + \&c.)$$

ce qui veut dire

$$v = u\sqrt{-1}.$$

Donc, moyennant un ſecteur hyperbolique imaginaire, on trouve un ſecteur circulaire imaginaire, & réciproquement.

§. 89. Tout ce que je viens de faire voir ſur les quantités tranſcendentes circulaires & logarithmiques, paroit être fondé ſur des principes beaucoup plus univerſels, mais qui ne ſont pas encore aſſez développés. Voici cependant ce qui pourra ſervir à en donner quelque idée. Il ne ſuffit pas d'avoir trouvé que ces quantités tranſcendentes ſont irrationelles, c'eſt à dire incommenſurables à l'unité. Cette propriété ne leur eſt pas unique. Car, outre qu'il y a des quantités irrationelles qu'on pourra former au hazard, & qui par là même ne ſont gueres du reſſort de l'analyſe, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme *algébriques:* & telles ſont toutes les *quantités irrationelles radicales*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ &c. & toutes les *racines irrationelles des équations algébriques*, comme p. ex. celles des équations

$$0 = xx - 4x + 1,$$
$$0 = x^3 - 5x + 1,$$
&c.

Je



Je nommerai les unes & les autres *quantités irrationelles radicales*, & voici le théoreme, que je crois pouvoir être démontré.

§. 90. Je dis donc *qu'aucune quantité tranſcendente circulaire & logarithmique ne ſauroit être exprimée par quelque quantité irrationelle radicale, qui ſe rapporte à la même unité, & dans laquelle il n'entre aucune quantité tranſcendente.* Ce théoreme ſemble devoir être démontré de ce que les quantités tranſcendentes dépendent de

$$e^x,$$

où l'expoſant eſt variable, au lieu que les quantités radicales ſuppoſent des expoſans conſtans. Ainſi p. ex. un arc de cercle étant rationel ou commenſurable au rayon, ſa tangente, que nous avons vu être irrationelle, ne ſauroit être une racine quarrée de quelque quantité rationelle. Car ſoit l'arc propoſé $= \omega$, & faiſons tang $\omega = \sqrt{a}$, nous aurons

$$t\omega^2 = \frac{s\omega^2}{\cos\omega^2} = \frac{1-\cos 2\omega}{1+\cos 2\omega} = a,$$

d'où il ſuit

$$\cos 2\omega = \frac{1-a}{1+a};$$

or cette quantité étant rationelle, il s'enſuit que l'arc $2\omega$ eſt irrationel, ce qui étant contre l'hypotheſe, il eſt clair qu'en faiſant tang $\omega = \sqrt{a}$, la quantité $a$ ne ſauroit être rationelle, & que partant la tangente d'un arc rationel quelconque n'eſt point une racine quarrée de quelque quantité rationelle.

§. 91. Ce théoreme étant une fois démontré dans toute ſon univerſalité, il s'enſuivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationelle, il n'y aura pas moien de la déterminer par quelque conſtruction géométrique. Car tout ce qu'on peut conſtruire géométrique-

# COMPTE RENDU

## DES SÉANCES

# DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

### SÉANCE DU LUNDI 13 MAI 1844.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE DE BEAUMONT.

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

### DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

« M. Liouville communique verbalement à l'Académie des remarques relatives, 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des *Principes* où Newton calcule l'action exercée par une sphère sur un point extérieur.

» **1**. Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

$a, b, \ldots, g, h$ étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p}{q}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable $x$ de cette équation, le quotient incomplet $\mu$, qui vient après la réduite $\frac{p}{q}$, et sert à former la réduite sui-



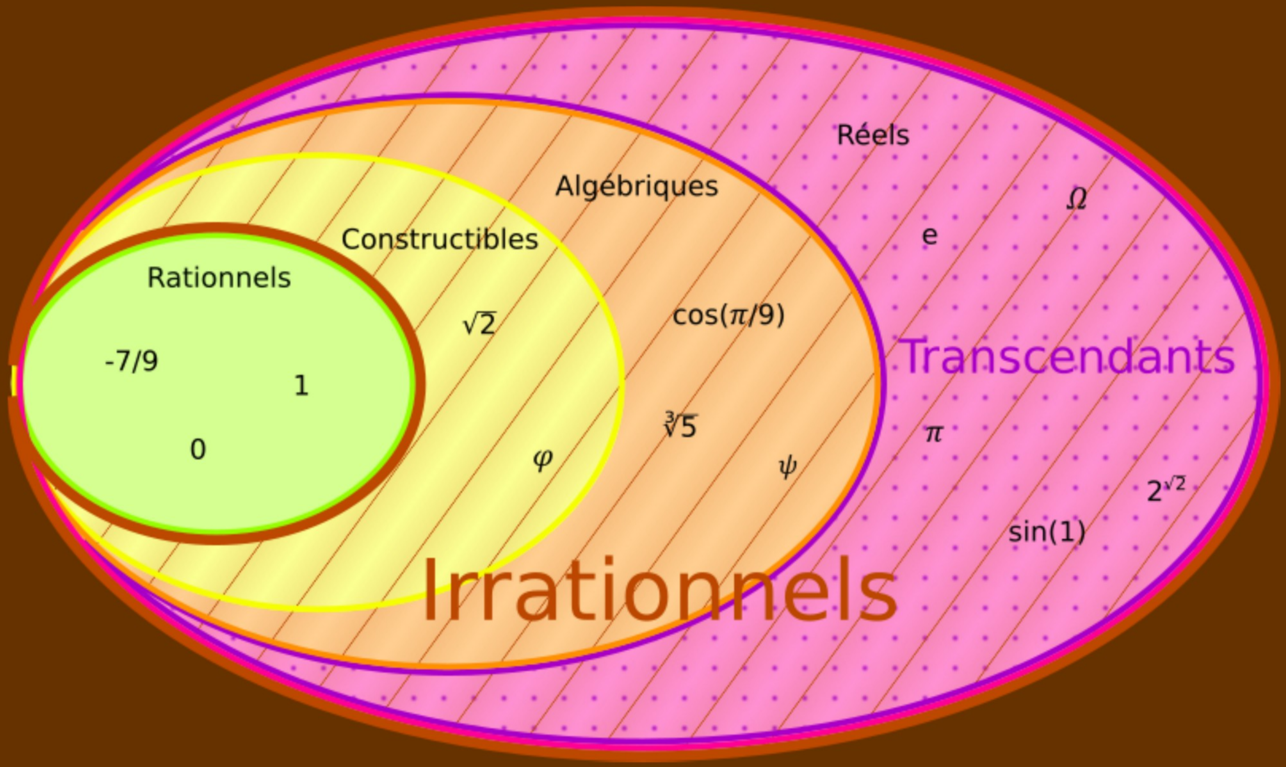


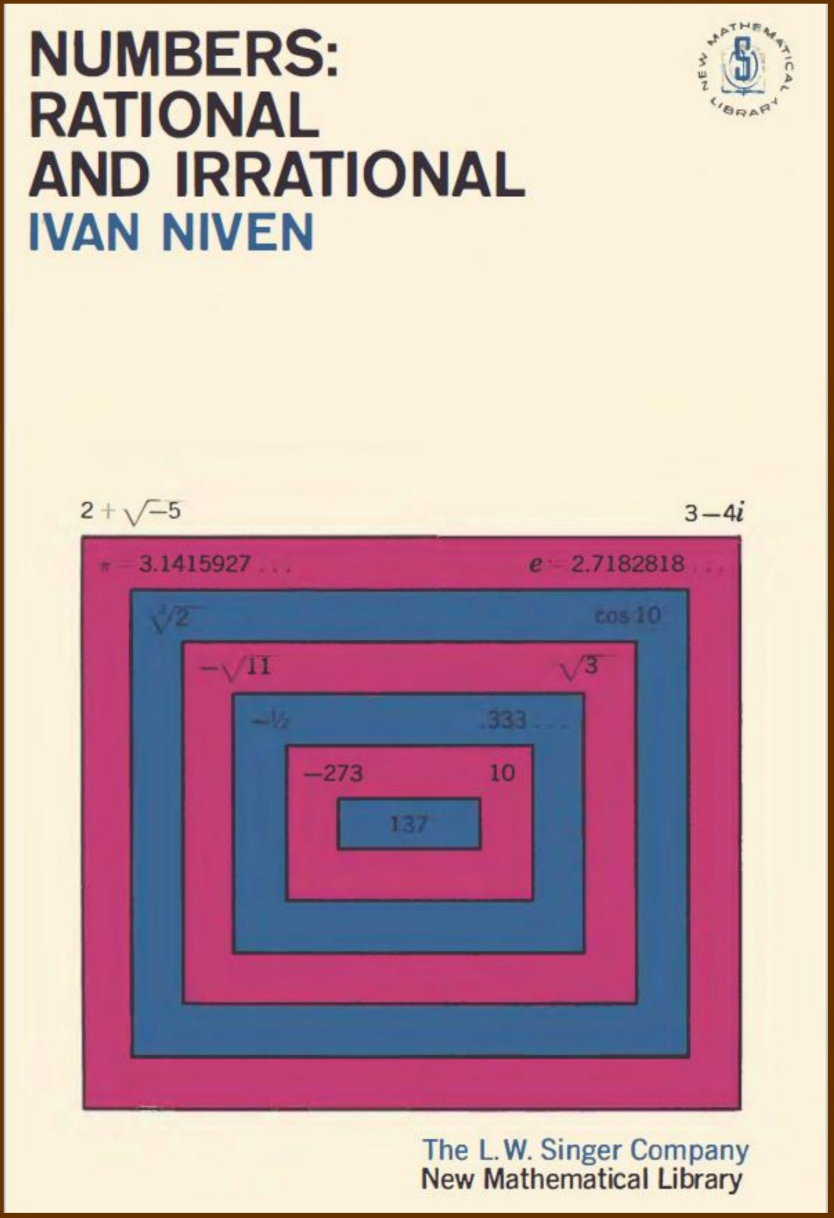
incomplet quelconque, on forme chacun des suivants $\mu$ à l'aide de la réduite $\frac{p}{q}$ qui le précède, d'après la loi $\mu = q^q$, ou bien encore d'après la loi $\mu = q^m$, $m$ étant l'indice du rang de $\mu$.

» Au reste la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^{1.2}} + \frac{1}{a^{1.2.3}} + \ldots + \frac{1}{a^{1.2.3\ldots m}} + \ldots,$$

$a$ étant un nombre entier.


Réels
Algébriques
Constructibles
Rationnels
-7/9
1
0
√2
φ
cos(π/9)
∛5
ψ
e
Ω
Transcendants
π
2^√2
sin(1)
Irrationnels


NUMBERS:
RATIONAL
AND IRRATIONAL
IVAN NIVEN
NEW MATHEMATICAL LIBRARY
2 + √−5
3 − 4i
π = 3.1415927 . . .
e = 2.7182818 . . .
cos 10
−√11
√3
−½
.333 . . .
−273
10
137
The L.W. Singer Company
New Mathematical Library

Fᵗ KLEIN
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GOETTINGUE

# LEÇONS SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

POSSIBILITÉ DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES ;
LES POLYGONES RÉGULIERS ;
TRANSCENDANCE DES NOMBRES $e$ ET $\pi$.
(Démonstration élémentaire)

RÉDACTION FRANÇAISE
autorisée par l'Auteur

PAR

J. GRIESS
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE D'ALGER



PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1896

# DEUXIÈME PARTIE

## LES NOMBRES TRANSCENDANTS ET LA QUADRATURE DU CERCLE

## CHAPITRE I

### Existence des nombres transcendants. Démonstration de M. Cantor.

1. Représentons comme de coutume les nombres par les points d'un axe des abscisses. Si nous nous bornons aux nombres rationnels, les points correspondants rempliront l'axe des abscisses avec une « *densité parfaite* », c'est-à-dire que dans un intervalle, si petit qu'il soit, il y a une infinité de tels points. Néanmoins, comme les géomètres anciens l'avaient déjà reconnu, l'*ensemble continu* des points de l'axe n'est pas épuisé de cette manière ; les nombres irrationnels s'introduisent entre les nombres rationnels, et la question se pose si, parmi les nombres irrationnels, il ne faut pas encore faire certaines différences.

Définissons d'abord ce qu'on entend par *nombres algébriques*. On appelle ainsi toute racine d'une équation algébrique

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers, premiers entre eux. Bien entendu il n'est question que de racines réelles.

Les nombres rationnels en sont un cas particulier comme

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   2.2 Des Arts Florissants…
   2.3 ...Au Cantor

3. **L'Outil des Grandes Découvertes**

   **3.1 (Introduction aux) Fractions Continues**
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

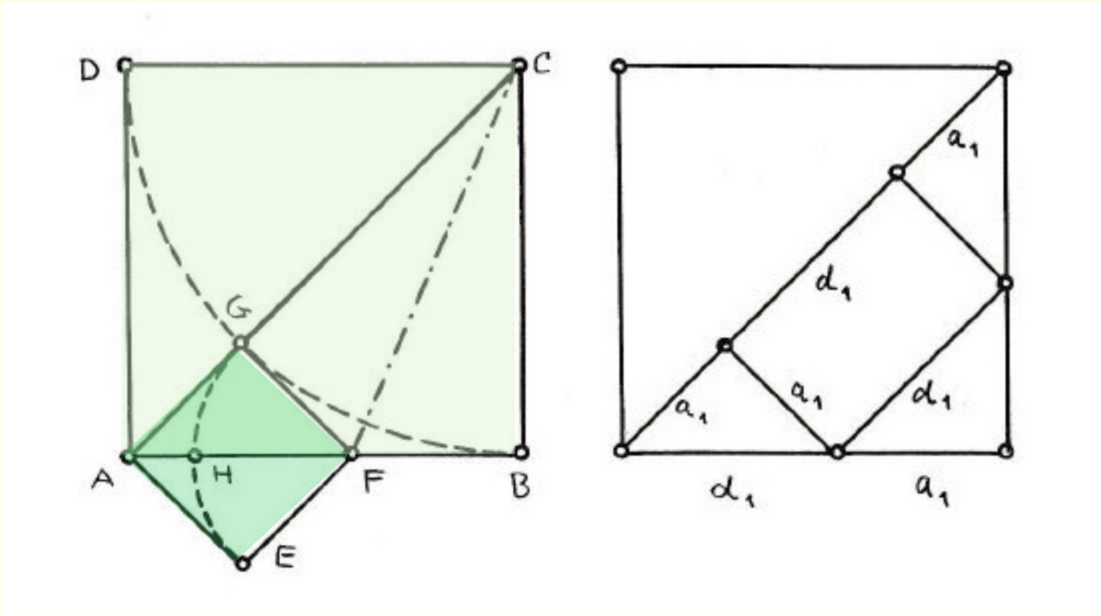
## Partie II : Étude de Cas.
## Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes.
## Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**




H. Lebesgue,
*Leçons sur les Constructions Géométriques*
(1940-41)

$$x = \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{AG}{AB} = 1 + \frac{1}{\dfrac{AF + FB}{AG}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{AF}{AG}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + x} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + x}} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + x}}}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}}$$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$$\Phi \approx 2 \,,\ \frac{3}{2} \,,\ \frac{5}{3} \,,\ \frac{8}{5} \,,\ \frac{13}{8} \,,\ \cdots$$

$$\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) = 3 + \frac{4}{3+\sqrt{13}}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+(\sqrt{13} - 3)}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+\dfrac{4}{3+\sqrt{13}}}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+\dfrac{4}{6+\dfrac{4}{6+\dfrac{4}{\ddots}}}}$$

*in* Bombelli, *Deuxième édition* (1579)

L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
*Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.*
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
*Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.*

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
*Con licenza de' Superiori.*

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \left(\sqrt{3}-1\right)}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \left(\sqrt{3}-1\right)}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

***(répétition périodique)***

$$x = \sqrt{7}$$

$$x = \sqrt{7} \approx 2{,}6457513111\ldots \approx 2 + \frac{6457513111}{10000000000} \qquad x = 2 + \frac{1}{y}$$

$$y = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\mathbf{2+z}}}}}}}}}}}}$$

*(début de répétition périodique ???)*

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} = 2 + \frac{1}{y}$$

*(répétition périodique)*

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}}}}} = \frac{14y+3}{9y+2}$$

$$y = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \quad , \quad x = \sqrt{7}$$

§ I. — *Sur les fractions continues considérées par rapport à l'Arithmétique.*

1. Comme la Théorie des fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique et d'Algèbre, et que, par cette raison, elle doit être peu connue des géomètres, nous croyons devoir commencer ces Additions par une exposition abrégée de cette Théorie, dont nous aurons souvent lieu de faire l'application dans la suite.

On appelle, en général, *fraction continue* toute expression de cette forme

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \ddots}}},$$

où les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ et $b, c, d, \ldots$ sont des nombres entiers positifs ou négatifs; mais nous ne considérerons ici que les fractions continues où les numérateurs $b, c, d, \ldots$ sont égaux à l'unité, c'est-à-dire, celles qui sont de la forme

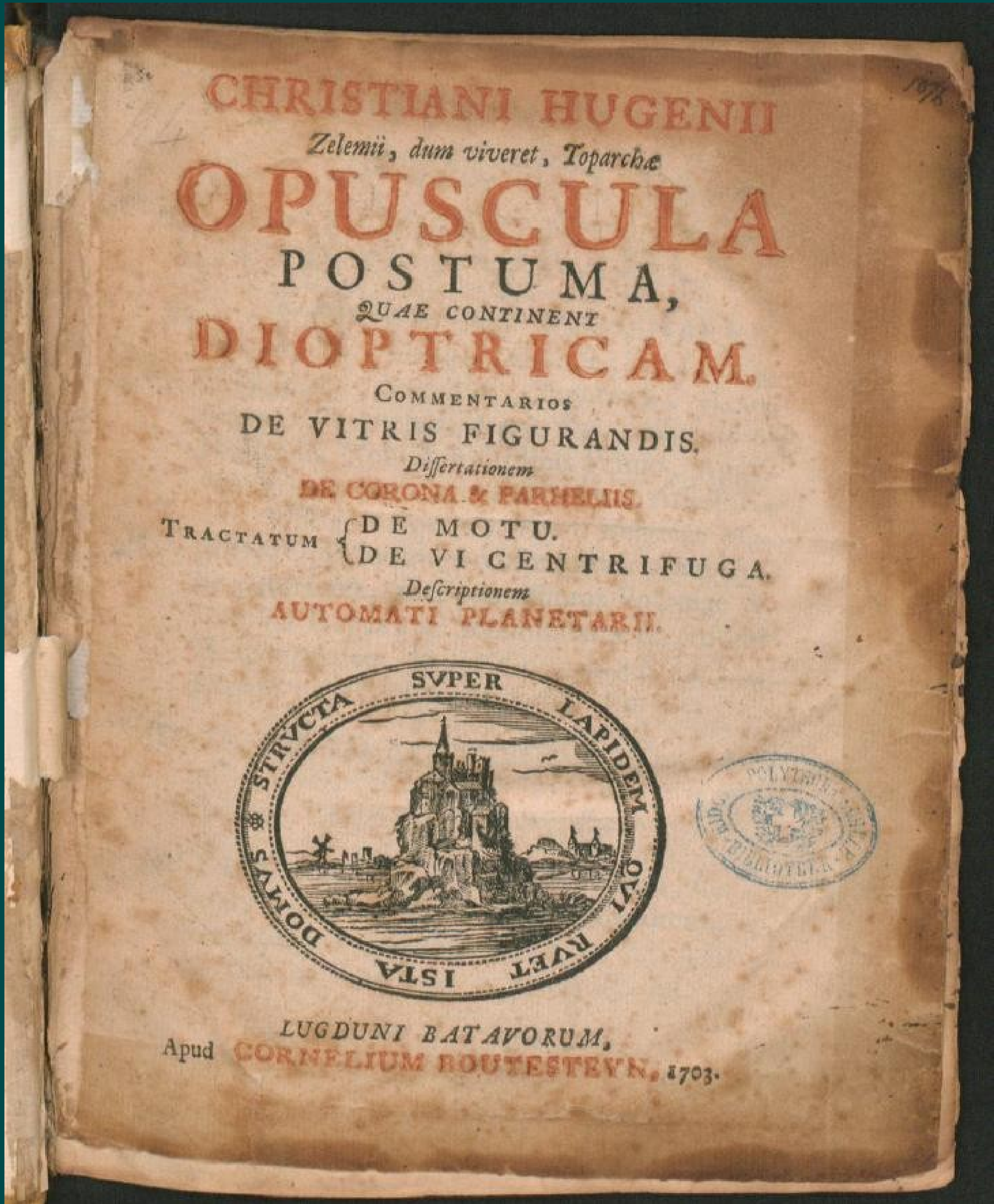
$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ddots}}},$$

REMARQUE.

22. La première solution de ce Problème a été donnée par Wallis dans un petit Traité qu'il a joint aux Œuvres posthumes d'Horrocius, et on la retrouve dans l'endroit cité de son *Algèbre;* mais la méthode de cet Auteur est indirecte et fort laborieuse. Celle que nous venons de donner est due à Huyghens, et l'on doit la regarder comme une des principales découvertes de ce grand Géomètre. La construction de son automate planétaire parait en avoir été l'occasion. En effet, il est clair que, pour pouvoir représenter exactement les mouvements et les périodes des planètes, il faudrait employer des roues où les nombres des dents fussent précisément dans les mêmes rapports que les périodes dont il s'agit; mais, comme on ne peut pas multiplier les dents au delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue, et que d'ailleurs les périodes des planètes sont incommensurables ou du moins ne peuvent être représentées avec une certaine exactitude que par de très-grands nombres, on est obligé de se contenter d'un à peu près, et la difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il est possible de la vérité, et plus que ne pourraient faire d'autres rapports quelconques qui ne seraient pas conçus en termes plus grands.

Huyghens résout cette question par le moyen des fractions continues, comme nous l'avons fait ci-dessus; il donne la manière de former ces fractions par des divisions continuelles, et il démontre ensuite les principales propriétés des fractions convergentes qui en résultent, sans oublier même les fractions intermédiaires. (*Voyez*, dans ses *Opera posthuma*, le Traité intitulé *Descriptio automati planetarii.*)

D'autres grands Géomètres ont ensuite considéré les fractions continues d'une manière plus générale. On trouve surtout dans les *Commentaires de Pétersbourg* (tomes IX et XI des *anciens* et tomes IX et XI des *nouveaux*) des Mémoires d'Euler remplis des recherches les plus savantes et les plus ingénieuses sur ce sujet; mais la Théorie de ces fractions, envisagée du côté arithmétique, qui en est le plus intéressant,



CHRISTIANI HUGENII

*Zelemii, dum viveret, Toparchæ*

OPUSCULA

POSTUMA,

QUAE CONTINENT

DIOPTRICAM.

COMMENTARIOS

DE VITRIS FIGURANDIS.

*Dissertationem*

DE CORONA & PARHELIIS.

TRACTATUM { DE MOTU.<br>DE VI CENTRIFUGA.

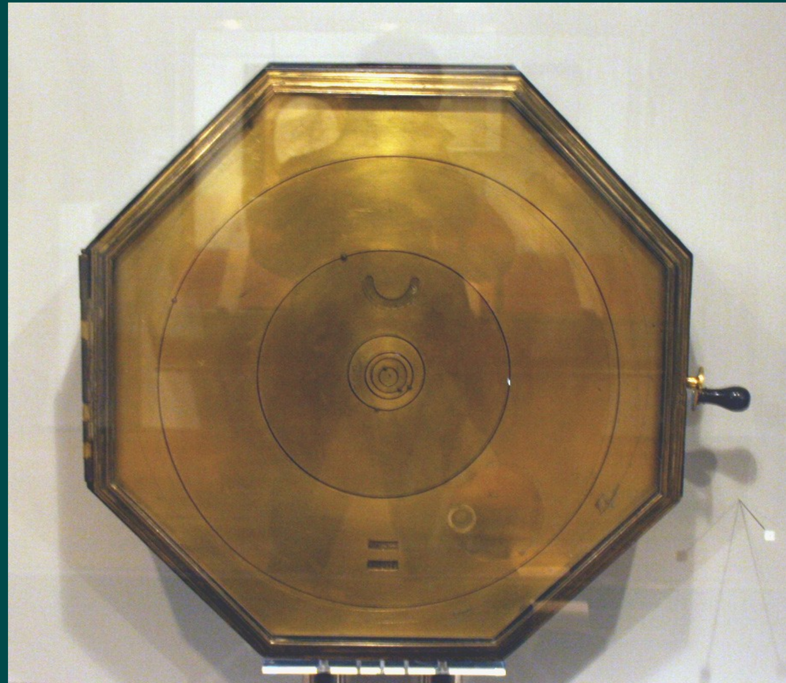
*Descriptionem*

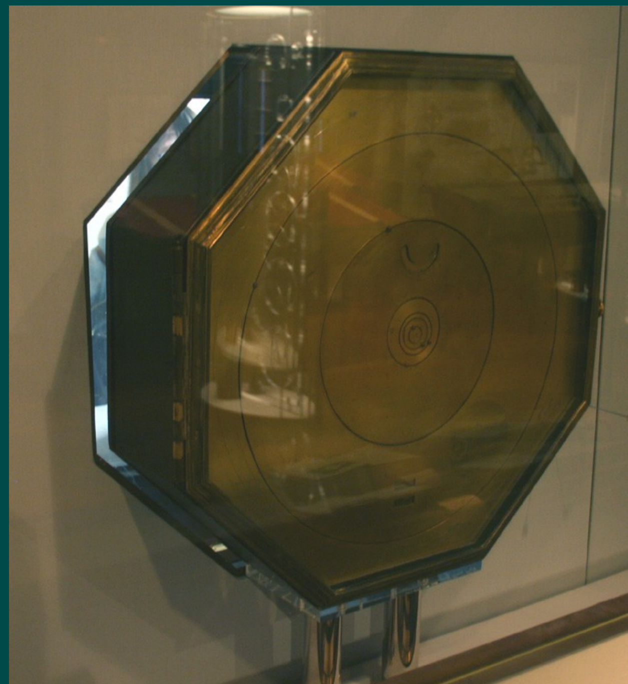
AUTOMATI PLANETARII.

SVPER LAPIDEM QVO RVET ISTA DOMVS STRVCTA

LUGDUNI BATAVORUM,

Apud CORNELIUM BOUTESTEYN, 1703.





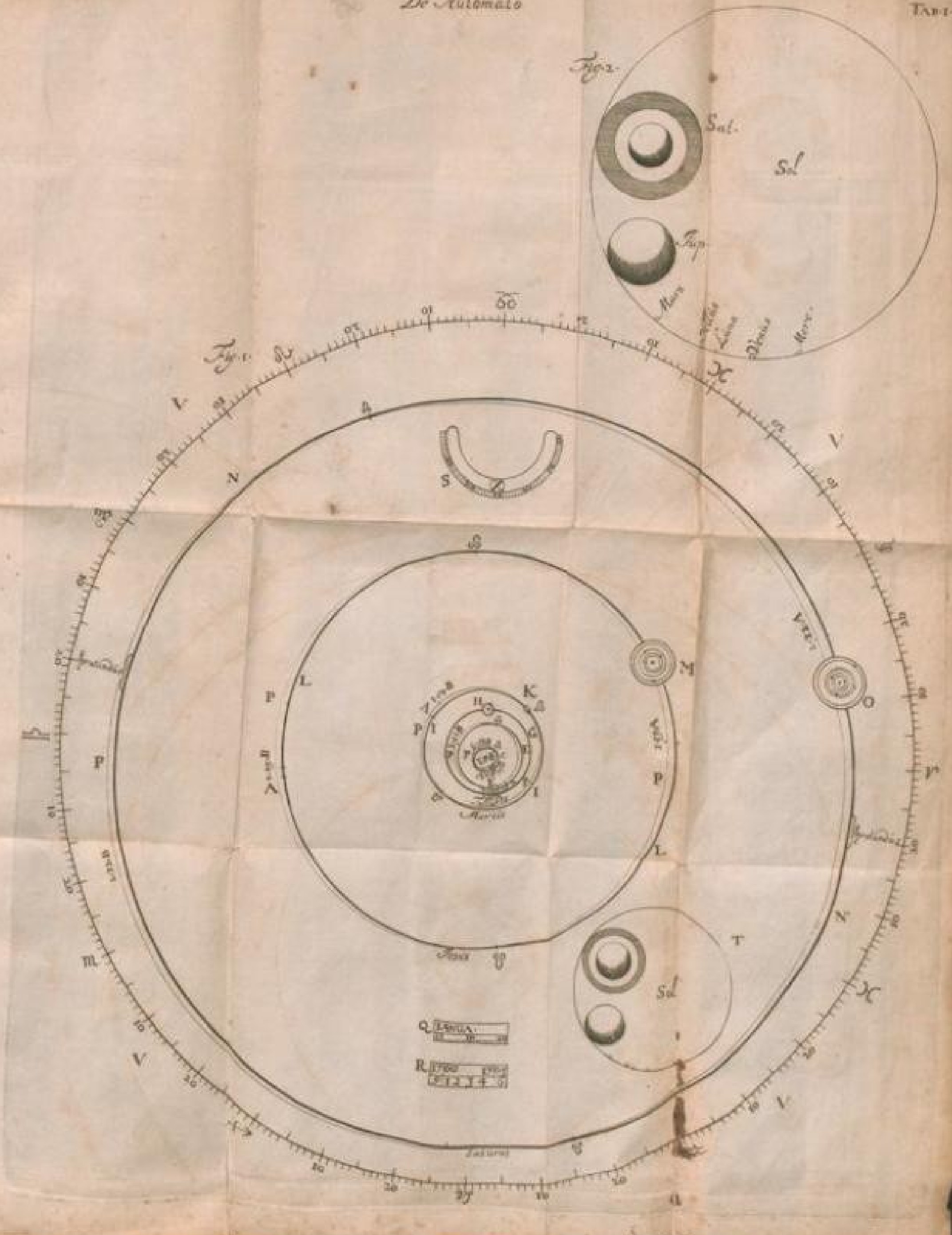


Fig. 2.
Sat.
Sol
Jup.
Mars
Luna
Venus
Merc.
Fig. 1.
Sol
T
M
O
Luna
Saturn



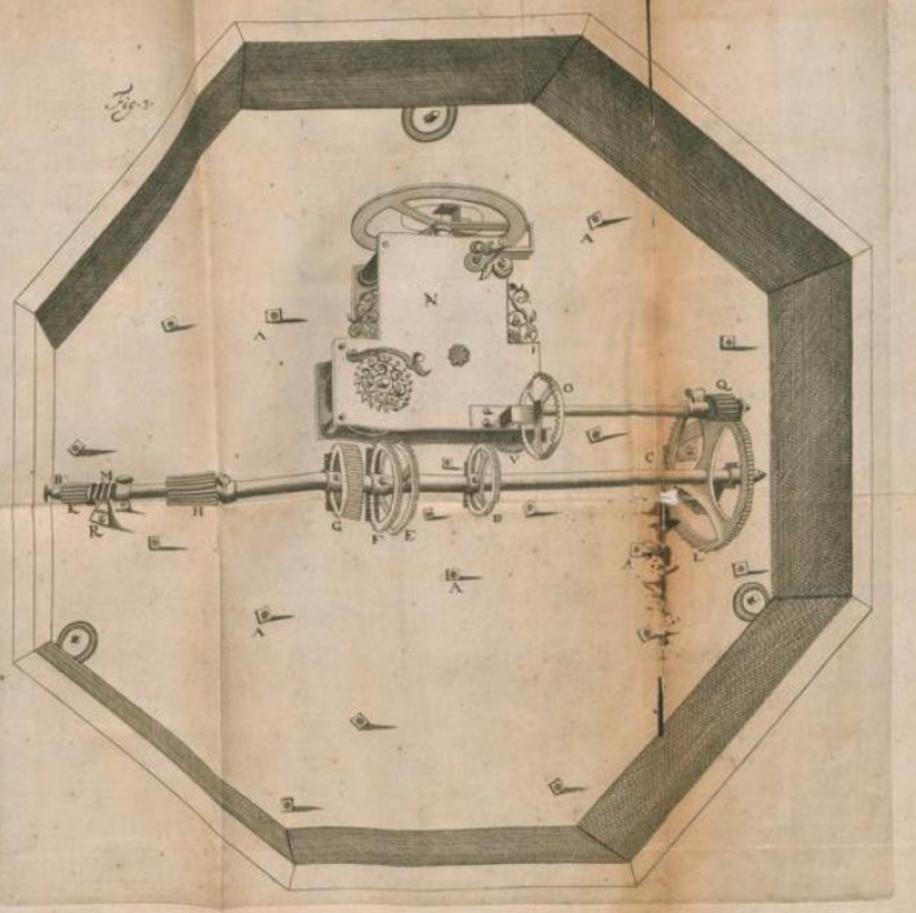


Fig. 3.
N
O
Q
A
C
H
G
F
E
D
L
R

Fig. 3. Annuus Sáturni motus (sequor autem tum in hoc tum in cæteris Riccioli recentissimas Tabulas) prodi-



tus est gr. 12, 13′, 34″, 18‴. Annuus Telluris, quem ille Solis vocat, gr. 359°, 45′, 40″, 31‴. Reductis igitur omnibus ad scrupula tertia, fit proportio 2640858 ad 77708431. Itaque quam rationem habet posterior horum numerus ad priorem, eam habet Saturni tempus Periodicum ad tempus, quo circa Solem Tellus convertitur, ac proinde & rotæ Saturniæ dentium numerus ad suæ motricis rotæ dentes hanc rationem quam proxime servare debet. Inveniendis igitur numeris minoribus qui proxime rationem istam exprimunt; divido majorem per minorem, & rursus minorem per eum qui a divisione relinquitur, & hunc rursus per ultimum residuum, atque ita porro continenter pergendo invenio quod fit ex primâ divisione

$$29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{\&c.}}}}}}}$$

nempe numerum cum adjuncta fractione, cujus fractionis numerator est unitas, denominator vero rursus fractionem adjunctam habet, cujus numerator unitas, denominator similiter ac præcedens componitur; idque ita consequenter; qua via, si, quo usque potest, continuetur, eo devenitur, ut a divisione tandem unitas supersit.

Jam ab hac fractionum serie posteriores aliquousque præcidendo, velut hic $\frac{1}{5}$ cum cæteris deinceps sequentibus, reliquasque cum numero ipsas præcedente reducendo ad communem denominatorem, erit hujus ad numeratorem ratio propinqua ei, quam datorum numerorum minor habet ad majorem; adeo quidem ut minoribus numeris propius ad eam accedere non liceat.

 Re-



Reductionis modus facilis est; nempe posteriores, unde hic incipimus fractiones, $\frac{1}{2+\frac{1}{1}}$, tantundem valent ac $\frac{1}{3}$, unde ad proxime præcedentem pergendo ac reducendo $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, faciunt $\frac{3}{7}$; denique & numerum integrum includendo ac reducendo $29\frac{3}{7}$, fiunt $\frac{206}{7}$. Itaque numeri 7 ad 206 propinqua ratio est rationis 2640858 ad 77708431. Eoque rotæ Saturniæ dentes 206 dedimus, ipsam vero moventi dentes 7. Quod autem minores numeri non inveniuntur, qui propius rationem propositam exprimant, ita ostendemus. Principio certum est numeros hujusmodi reductione factos, esse inter se primos, ex Prop. 1. l. 7. Elem. quia nihil aliud est divisio nostra continua quam subtractio illa Euclidea, quæ si numeris nostris 206 & 7, reductione effectis adhibeatur, planum est unitatem tandem relinqui, quia fractionum istarum omnium numerator est unitas. Quod si jam duo quivis alii numeri propius ad proportionem magnorum accedunt, eos necesse est, facta continua divisione majoris per minorem, donec unitas supersit, quotientem efficere 29, cum fractionibus iisdem, quæ supra, continue adjectis, atque ulterius continuatis quam unde reductionem incepimus, cum inveniremus numeros 7 & 206. alioqui enim ad primæ divisionis quotientem qui dictas fractiones omnes quousque possunt continuatas adjectas habet propius accedi nequit. Sic quoniam continua divisione 206 per 7, invenitur

$$29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}$$

necesse esset divisione simili numerorum propiorum unam saltem insuper fractionem istis adjici, vel $\frac{1}{5}$ vel aliam qua propius ad quotientem universalem perveniatur

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   2.2 Des Arts Florissants…
   2.3 ...Au Cantor

3. **L'Outil des Grandes Découvertes**

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   **3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…**

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

## Partie II : Étude de Cas.
## Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes.
## Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**

$$777084 = \mathbf{29} \times 26409 + 11223 \qquad \frac{777084}{26409} = \mathbf{29} + 1 \Big/ \frac{26409}{11223}$$

$$26409 = \mathbf{2} \times 11223 + 3963 \qquad \frac{26409}{11223} = \mathbf{2} + 1 \Big/ \frac{11223}{3963}$$

$$11223 = \mathbf{2} \times 3963 + 3297 \qquad \frac{11223}{3963} = \mathbf{2} + 1 \Big/ \frac{3963}{3297}$$

$$3963 = \mathbf{1} \times 3297 + 666$$

$$3297 = 4 \times 666 + 33$$

$$666 = 19 \times 33 + 6$$

$$33 = 5 \times 6 + 2 \qquad \frac{33}{6} = 5 + 1 / 2$$

$$6 = 3 \times 2 + \mathbf{0}$$

3963 3297

33 6

…

DE AUTOMATO. 449

tus eſt gr. 12, 13′, 34″, 18‴. Annuus Telluris, quem il-
le Solis vocat, gr. 359°, 45′, 40″, 31‴. Reductis igitur
omnibus ad ſcrupula tertia, fit proportio 2640858 ad
77708431. Itaque quam rationem habet poſterior ho-
rum numerus ad priorem, eam habet Saturni tempus

$$29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \ \&c.$$

Ce rapport exprimé en décimales est, par le calcul de Viète, 3,1415926535..., de sorte qu'on aura la fraction $\frac{31415926535}{10000000000}$ à réduire en fraction continue par la méthode ci-dessus; or, si l'on ne prend que la fraction $\frac{314159}{100000}$, on trouve les quotients 3, 7, 15, 1,..., et si l'on prenait la fraction plus grande $\frac{314160}{100000}$, on trouverait les quotients 3, 7, 16,...; de sorte que le troisième quotient demeurerait incertain; d'où l'on voit que, pour pouvoir pousser seulement la fraction continue au delà de trois termes, il faudra nécessairement adopter une valeur de la périphérie qui ait plus de six caractères.

Si l'on prend la valeur donnée par *Ludolph* en trente-cinq caractères, et qui est

$$3,14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288,$$

et qu'on opère en même temps sur cette fraction et sur la même, en y augmentant le dernier caractère 8 d'une unité, on trouvera cette suite de quotients

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 84,\ 2,$$
$$1,\ 1,\ 15,\ 3,\ 13,\ 1,\ 4,\ 2,\ 6,\ 6,\ 1;$$

de sorte que l'on aura

$$\frac{\text{périphérie}}{\text{diamètre}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

Comme il y a ici des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra sim-

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^p \neq 2^n$$

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}584963 = 1 \ / \ \frac{1000000}{584963}$$

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\color{green}{\mathbf{2}} + \cfrac{1}{\color{red}{\mathbf{3}} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\mathit{Convergents} : 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{2} , \frac{3}{5} , \color{green}{\mathbf{\frac{7}{12}}} , \color{red}{\mathbf{\frac{24}{41}}} , \cdots$$

$$A.N. : \color{green}{\mathbf{0{,}583333}} , \quad \color{red}{\mathbf{0{,}585537}}$$

$$\Delta : \color{green}{\mathbf{0{,}006297}} , \quad \color{red}{\mathbf{-\ 0{,}000574}}$$

| | | |
|---|---|---|
| 100000000 | 141421356 | 1 |
| 82842712 | 100000000 | 2 |
| 17157288 | 41421356 | 2 |
| 14213560 | 34314576 | 2 |
| 2943728 | 7106780 | 2 |
| 2438648 | 5887456 | 2 |
| 505080 | 1219324 | 2 |
| 418328 | 1010160 | 2 |
| &c. | 209164 | |

Il eſt viſible à préſent, d'après ce calcul, que tous les dénominateurs ſont égaux à 2 & par conſéquent $\sqrt{2} =$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}}$$

Réſultat dont la raiſon ſe déduit de ce que nous avons vu ci-deſſus.

### *EXEMPLE III.*

Le nombre $e$ dont le logarithme eſt $= 1$, mérite une attention particuliere; ce nombre $e = 2,718281828459$, d'où réſulte l'équation $\frac{e-1}{2} = 0,8591409142295$. Cette fraction décimale, traitée comme la précédente, donnera les quotients ſuivants:



| | | |
|---|---|---|
| 8591409142295 | 10000000000000 | 1 |
| 8451545146224 | 8591409142295 | 6 |
| 139863996071 | 1408590857704 | 10 |
| 139312557916 | 1398639960710 | 14 |
| 551438155 | 9950896994 | 18 |
| 550224488 | 9925886790 | 22 |
| 1213667 | 25010204 | |

&c.

Et ſi, ayant pris une valeur plus exacte de $e$, on continue le calcul de la même maniere, on obtiendra les quotients

1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, &c.

qui forment tous, excepté le premier, une progreſſion arithmétique, d'où s'enſuit évidemment l'équation

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{\&c.}}}}}}}$$

(yy) Réſultat dont la raiſon peut ſe donner par le calcul infiniteſimal.

382. Puis donc qu'il eſt poſſible de tirer de ces ſortes d'expreſſions des fractions, qui menent très-promptement à un réſultat exact, cette méthode pourra être employée pour changer les fractions décimales en fractions ordinaires, qui en different très-peu. De plus, ſi on propoſe une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſoient des nombres très-grands, on pourra trouver des fractions exprimées par de moindres termes, leſquelles, ſans être entierement égales à la propoſée, en différeront cependant le moins poſſible. On peut par là réſoudre facilement le problême autrefois traité par *WALLIS*, qui conſiſte à trouver les fractions compoſées

# MÉMOIRE

SUR

## QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES QUANTITÉS TRANSCENDENTES CIRCULAIRES ET LOGARITHMIQUES.

PAR M. LAMBERT. *)

§. 1.

Démontrer que le diametre du cercle n'est point à sa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, c'est là une chose, dont les géometres ne seront gueres surpris. On connoit les nombres de *Ludolph*, les rapports trouvés par *Archimede*, par *Metius* etc. de même qu'un grand nombre de suites infinies, qui toutes se rapportent à la quadrature du cercle. Et si la somme de ces suites est une quantité rationelle, on doit assez naturellement conclure, qu'elle sera ou un nombre entier, ou une fraction très simple. Car, s'il y falloit une fraction fort composée, quelle raison y auroit-il, pourquoi plutôt telle que telle autre quelconque? C'est ainsi, par exemple, que la somme de la suite

$$\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{7\cdot 9} + \&c.$$

est égale à l'unité, qui de toutes les quantités rationelles est la plus simple. Mais, en omettant alternativement les 2, 4, 6, 8 &c. termes, la somme des autres

$\frac{2}{1\cdot 3}$

*) Lu en 1767.

$$\frac{2}{1.\,3}+\frac{2}{5.\,7}+\frac{2}{9.\,11}+\frac{2}{13.\,15}+\text{\&c.}$$

donne l'aire du cercle, lorsque le diametre eſt $=1$. Il ſemble donc que, ſi cette ſomme étoit rationelle, elle devroit également pouvoir être exprimée par une fraction fort ſimple, telle que ſeroit $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ &c. En effet, le diametre étant $=1$, le rayon $=\frac{1}{2}$, le quarré du rayon $=\frac{1}{4}$, on voit bien que ces expreſſions étant auſi ſimples, elles n'y mettent point d'obſtacle. Et comme il s'agit de tout le cercle, qui fait une eſpece d'unité, & non de quelque Secteur, qui de ſa nature demanderoit des fractions fort grandes, on voit bien, qu'encore à cet égard on n'a point ſujet de s'attendre à une fraction fort compoſée. Mais comme, après la fraction $\frac{11}{14}$ trouvée par *Archimede*, qui ne donne qu'un à peu près, on paſſe à celle de *Metius*, $\frac{355}{452}$, qui n'eſt pas non plus exacte, & dont les nombres ſont conſidérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure, que la ſomme de cette ſuite, bien loin d'être égale à une fraction ſimple, eſt une quantité irrationelle.

§. 2. Quelque vague que ſoit ce raiſonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne ſont pas celui de la quadrature du cercle. La plûpart de ceux qui s'attachent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraine quelque fois juſqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourroit-on croire, qu'ils ſe trouveroient ſatisfaits par ce que je viens de dire? Il y faut toute autre choſe. Et s'agit-il de démontrer, qu'en effet le diametre n'eſt pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonſtration doit être ſi rigide, qu'elle ne le cede à aucune démonſtration géométrique. Et avec tout cela je reviens à dire, que les géométres n'en ſeront point ſurpris. Ils doivent être accoutumés depuis longtems à ne s'attendre à autre choſe. Mais voici ce qui méritera plus d'attention, & ce qui fera une bonne partie de ce Mémoire. Il s'agit de faire voir, que *toutes les fois qu'un arc de cercle quelconque eſt commenſurable au rayon*, *la tangente de cet arc lui eſt incom-*

com-



*commenſurable*; & que réciproquement, *toute tangente commenſurable n'eſt point celle d'un arc commenſurable.* Voila de quoi être un peu plus ſurpris. Cet énoncé paroiſſoit devoir admettre une infinité d'exceptions, & il n'en admet aucune. Il fait encore voir juſqu'à quel point les quantités circulaires tranſcendentes ſont tranſcendentes, & reculées au delà de toute commenſurabilité. Comme la démonſtration que je vais donner exige toute la rigueur géométrique, & qu'en outre elle ſera un tiſſu de quelques autres theorémes, qui demandent d'être démontrés avec tout autant de rigueur, ces raiſons m'excuſeront, quand je ne me hâterai pas d'en venir à la fin, ou lorsque chemin faiſant je m'arrêterai à ce qui ſe préſentera de remarquable.

§. 3. Soit donc propoſé *un arc de cercle quelconque, mais commenſurable au rayon:* & il s'agit de trouver, *ſi cet arc de cercle ſera en même tems commenſurable à ſa tangente ou non?* Qu'on ſe figure pour cet effet une fraction telle, que ſon numérateur ſoit égal à l'arc de cercle propoſé, & que ſon dénominateur ſoit égal à la tangente de cet arc. Il eſt clair que, de quelque maniere que cet arc & ſa tangente ſoient exprimés, cette fraction doit être égale à une autre fraction, dont le numérateur & le dénominateur ſeront des nombres entiers, toutes les fois que l'arc de cercle propoſé ſe trouvera être commenſurable à ſa tangente. Il eſt clair auſſi que cette ſeconde fraction doit pouvoir être déduite de la premiere, par la même méthode, dont on ſe ſert en arithmétique pour réduire une fraction à ſon moindre dénominateur. Cette méthode étant connue depuis *Euclide*, qui en fait la 2me prop. de ſon 7me Livre, je ne m'arrêterai pas à la démontrer de nouveau. Mais il convient de remarquer que, tandis que *Euclide* ne l'applique qu'à des nombres entiers & rationels, il faudra que je m'en ſerve d'une autre façon, lorsqu'il s'agit d'en faire l'application à des quantités, dont on ignore encore ſi elles ſeront rationelles ou non? Voici donc le procédé qui conviendra au cas dont il eſt ici queſtion.

§. 4. Soit le rayon $=1$, un arc de cercle propoſé quelconque $=v$. Et on aura les deux ſuites infinies fort connues

 ſin

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7} v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 + \&c.$$

Comme dans ce qui suivra je donnerai deux suites pour l'hyperbole qui ne différeront de ces deux qu'en ce que tous les signes sont positifs, je différerai jusques-là de démontrer la loi de progression de ces suites, & encore ne la démontrerai-je que pour ne rien omettre de tout ce que demande la rigueur géométrique. Il suffit donc d'en avoir averti les Lecteurs d'avance.

§. 5. Or comme il est

$$\text{tang } v = \frac{\sin v}{\cos v},$$

nous aurons, en substituant ces deux suites, la fraction

$$\text{tang } v = \frac{v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \&c.}$$

Je la poserai pour plus de brièveté

$$\text{tang } v = \frac{A}{B},$$

de sorte qu'il soit

$$A = \sin v,$$
$$B = \cos v.$$

Voici maintenant le procédé que prescrit *Euclide*.

§. 6. On divise B par A; soit le quotient $= Q'$, le résidu $= R'$.
On divise A par $R'$; soit le quotient $= Q''$, le résidu $= R''$.
On divise $R'$ par $R''$; soit le quotient $= Q'''$, le résidu $= R'''$.
On divise $R''$ par $R'''$; soit le quotient $= Q^{IV}$, le résidu $= R^{IV}$. &c.

de



de sorte qu'en continuant ces divisions, on trouve successivement

les quotiens $Q', Q'', Q''' \ldots\ldots\ldots Q^n, Q^{n+1}, Q^{n+2} \ldots$ &c.

les résidus $R', R'', R''' \ldots\ldots\ldots R^n, R^{n+1}, R^{n+2} \ldots$ &c.

& il est clair sans que j'en avertisse, que les exposans $n$, $n+1$, $n+2$ &c. ne servent qu'à indiquer le quantieme quotient ou résidu est celui où ils se trouvent marqués. Ce qui étant posé, voici ce qu'il s'agit de démontrer.

§. 7. En premier lieu, *non seulement que la division peut être continuée sans fin, mais que les quotiens suivront une loi très simple en ce qu'il sera*

$$Q' = +1 : v,$$
$$Q'' = -3 : v,$$
$$Q''' = +5 : v,$$
$$Q^{IV} = -7 : v, \ \&c.$$

*& en général*

$$Q^n = \pm (2n - 1) : v,$$

*où le signe + est pour l'exposant n pair, le signe — pour l'exposant n impair, & que de la sorte on aura pour la tangente exprimée par l'arc la fraction continue très simple*

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \&c.}}}}}$$

§. 8. En second lieu, *que les résidus* $R', R'', R'''$ &c. *seront exprimés par les suites suivantes, dont les loix de progression sont également fort simples:*



$R' =$

$$\cot v = \cfrac{1}{(w-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(3w-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(5w-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(7w-2) + \cfrac{1}{1 + \&c.}}}}}}}}$$

§. 73. Comparons maintenant *les quantités transcendentes circulaires aux quantités logarithmiques* qui leur sont analogues. Soit $e$ le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Et on sait que si dans les deux suites dont nous nous sommes servi ci dessus (§. 4.)

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7} v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 + \&c.$$

tous les signes sont pris positifs, elles se changent en

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = v + \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} v^7 + \&c.$$

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = 1 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 + \&c.$$

Or, en traitant ces deux dernieres suites de la même maniere que nous avons traité les deux premieres (§. 4. & suiv.) l'opération ne différera que dans les signes, qui pour le cas présent seront tous positifs. Comme on peut s'en convaincre sans peine, je n'en rapporterai point le détail. Il sera donc

$e^v -$



$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \cfrac{1}{1:v + \cfrac{1}{3:v + \cfrac{1}{5:v + \cfrac{1}{7:v + \cfrac{1}{9:v + \cfrac{1}{11:v + \cfrac{1}{13:v + \&c.}}}}}}}$$

§. 74. Et comme il est

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1},$$

on voit qu'en faisant $2v = x$, on aura

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{2:x + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \cfrac{1}{18:x + \&c.}}}}}$$

d'où l'on tire

$$\frac{e^x + 1}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2:x + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \&c.}}}}}$$

ou bien



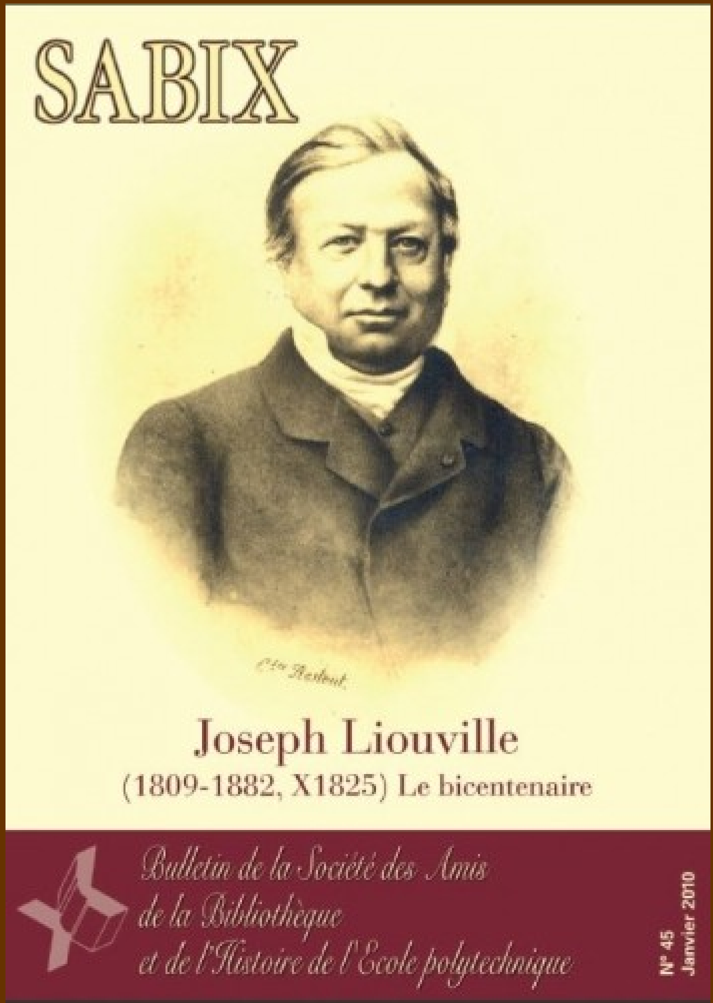
$e^x -$

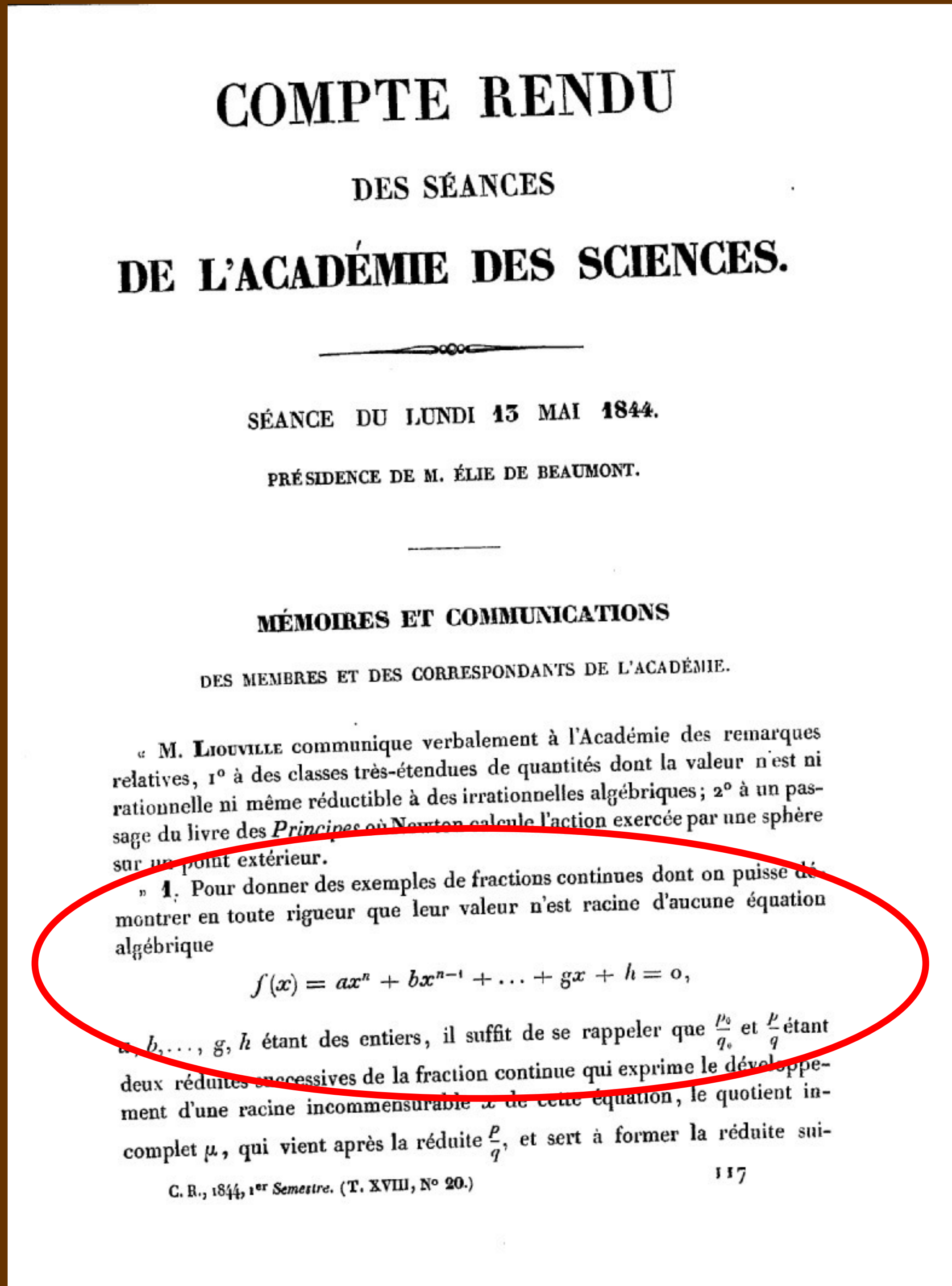
$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}}$$

$$\tan\left(\frac{m}{n}\right) = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \cfrac{m^2}{9n - \cfrac{m^2}{\ddots}}}}}}$$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

$$|b_k| > |a_k| + 1 \Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$$



# COMPTE RENDU

## DES SÉANCES

# DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 MAI 1844.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE DE BEAUMONT.

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

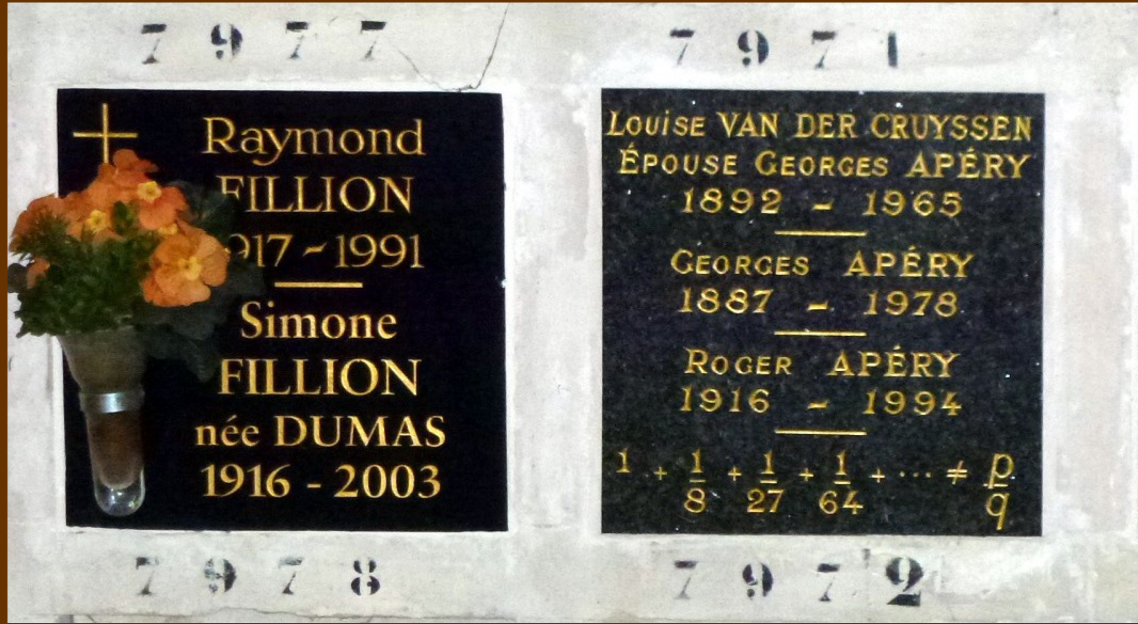
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

« M. Liouville communique verbalement à l'Académie des remarques relatives, 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des *Principes* où Newton calcule l'action exercée par une sphère sur un point extérieur.

» 1. Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

$a, b, \ldots, g, h$ étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p}{q}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable $x$ de cette équation, le quotient incomplet $\mu$, qui vient après la réduite $\frac{p}{q}$, et sert à former la réduite sui-




***1978 ***

$$\left|\varsigma(3)-\frac{p_n}{q_n}\right|\leq\frac{1}{q_n^{\;1,08}}$$

$$\Rightarrow\ \varsigma(3)\notin\mathbb{Q}$$

1. Journées Arithmétiques de Marseille-Luminy, June 1978

The board of programme changes informed us that R. Apéry (Caen) would speak Thursday, 14.00 "Sur l'irrationalité de $\zeta(3)$." Though there had been earlier rumours of his claiming a proof, scepticism was general. The lecture tended to strengthen this view to rank disbelief. Those who listened casually, or who were afflicted with being non-Francophone, appeared to hear only a sequence of unlikely assertions.

**Exercise**

*Prove the following amazing claims*:

1 For all $a_1, a_2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}{(x+a_1)\dots(x+a_k)} = \frac{1}{x}.$$

2 $$\zeta(3) =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}. \qquad (1)$$

3 Consider the recursion:

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1},$$
$$n \geqslant 2. \qquad (2)$$

Let $\{b_n\}$ be the sequence defined by $b_0 = 1$, $b_1 = 5$, and $b_n = u_n$ for all $n$; then the $b_n$ all are integers! Let $\{a_n\}$ be the sequence defined by $a_0 = 0$, $a_1 = 6$, and $a_n = u_n$ for all $n$; then the $a_n$ are rational numbers with denominator dividing $2[1, 2, \dots, n]^3$ (here $[1, 2, \dots, n]$ is the lcm (lowest common multiple) of $1, \dots, n$).

# A Proof that Euler Missed ...

## Apéry's Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$

## An Informal Report

Alfred van der Poorten

7 Show that

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 - \cfrac{1}{117 - \cfrac{64}{535 - \cfrac{729}{1436 - \cfrac{4096}{3105 - \dots}}}}}$$

$$- \frac{n^6}{34n^3 + 51n^2 + 27n + 5 \dots}$$

and deduce that $\zeta(3) = 1.202\,056\,903\dots$ is irrational.

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   2.2 Des Arts Florissants…
   2.3 ...Au Cantor

3. L'Outil des Grandes Découvertes

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

**4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?**

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

## Partie II : Étude de Cas. Le Nombre *e*, niveau lycée

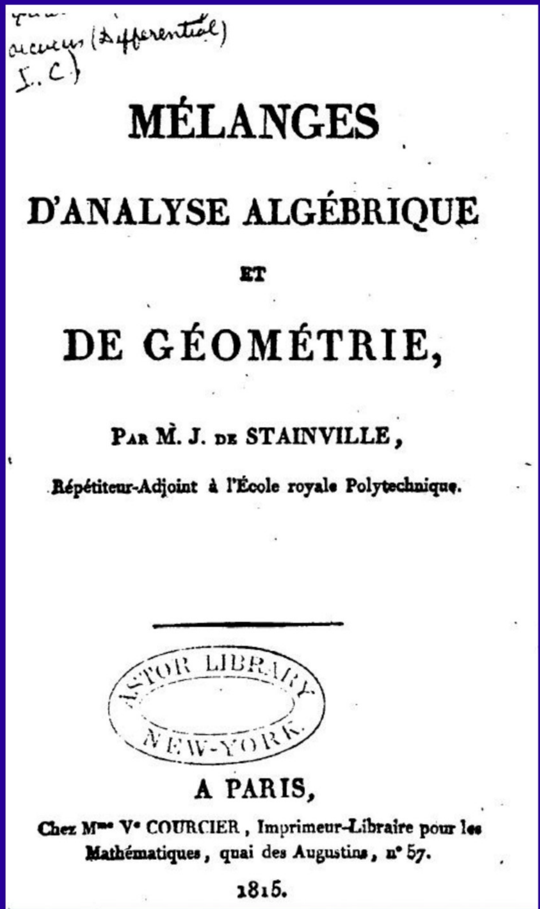
- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes. Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<e<1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n.n!}$$



(Differential)

MÉLANGES

D'ANALYSE ALGÉBRIQUE

ET

DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. J. DE STAINVILLE,

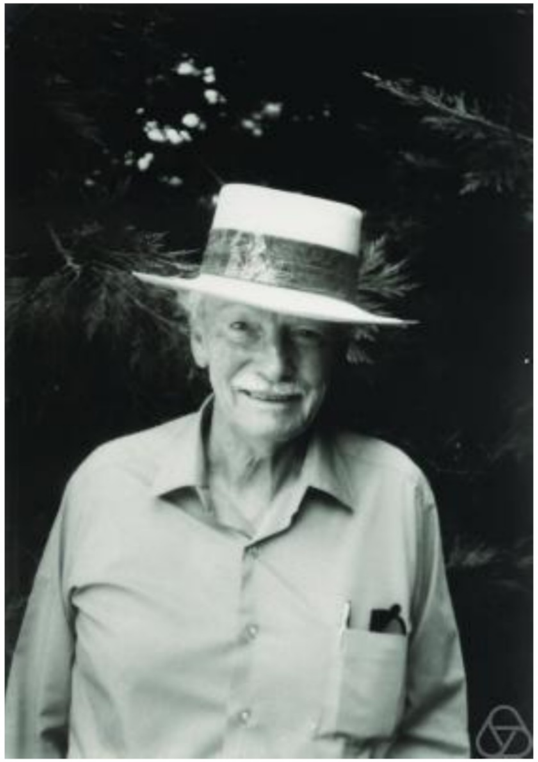
Répétiteur-Adjoint à l'École royale Polytechnique.



A PARIS,

Chez Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1815.



Ivan Niven (1915-1999)

# A SIMPLE PROOF THAT $\pi$ IS IRRATIONAL

IVAN NIVEN

Let $\pi = a/b$, the quotient of positive integers. We define the polynomials

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer $n$ being specified later. Since $n!f(x)$ has integral coefficients and terms in $x$ of degree not less than $n$, $f(x)$ and its derivatives $f^{(j)}(x)$ have integral values for $x=0$; also for $x=\pi=a/b$, since $f(x)=f(a/b-x)$. By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

and

$$(1) \qquad \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0).$$

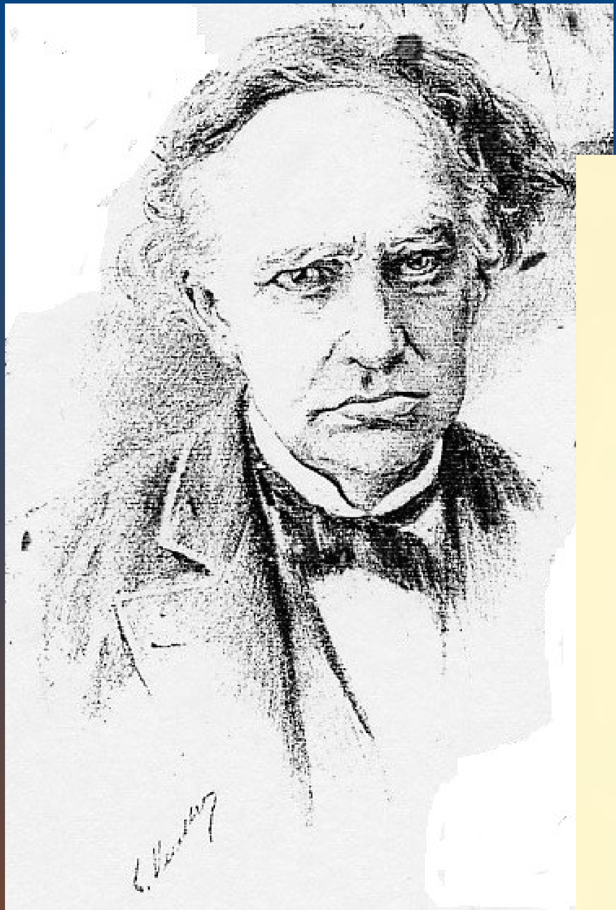
Now $F(\pi)+F(0)$ is an *integer*, since $f^{(j)}(\pi)$ and $f^{(j)}(0)$ are integers. But for $0<x<\pi$,

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for $n$ sufficiently large. Thus (1) is false, and so is our assumption that $\pi$ is rational.

PURDUE UNIVERSITY

Received by the editors November 26, 1946, and, in revised form, December 20, 1946.



EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT,

SUR

# QUELQUES APPROXIMATIONS ALGÉBRIQUES.

*Journal de Crelle*, t. 76, p. 342-344, 1873.

... Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre $\pi$. Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur en coûter quelques efforts. Tout ce que je puis, c'est de refaire ce qu'a déjà fait Lambert, seulement d'une autre manière, au moyen de cette égalité

$$A_n = U \sin x + V \cos x = \frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz \, dz,$$

où $A_n$, U et V désignent les mêmes quantités que dans ma lettre à M. Gordan. Vous savez que U est un polynome entier et à coefficients entiers en $x^2$ du degré $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ selon que $n$ est pair ou impair; il en résulte dans le premier cas, par exemple, que pour $x = \frac{\pi}{2}$, en supposant que $\frac{\pi^2}{4}$ soit une fraction $\frac{b}{a}$, on aura

$$U = \frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}},$$



où N est entier, et la relation proposée donne

$$\frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{a}\right)^n}{2.4\ldots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos \frac{\pi z}{2} \, dz$$

ou bien

$$N = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^n}{2.4\ldots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos \frac{\pi z}{2} \, dz.$$

Or, on met immédiatement une impossibilité en évidence, puisque le second membre devient, sans pouvoir jamais s'annuler, plus petit que toute quantité donnée quand $n$ augmente, le premier étant un nombre entier.

Voici une autre conséquence de l'expression de $A_n$ par une intégrale définie; on en tire aisément, sous forme d'intégrales doubles, les quantités

$$B_n = \int_0^x A_n \, dx, \qquad C_n = \int_0^x B_n \, dx, \qquad \ldots,$$

en employant les formules élémentaires

$$\int_0^x dx \int_0^x f(x) \, dx = \int_0^x (x-z) f(z) \, dz = x^2 \int_0^1 (1-\lambda) f(\lambda x) \, d\lambda,$$

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x f(x) \, dx = \int_0^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z) \, dz$$
$$= \frac{x^3}{1.2} \int_0^1 (1-\lambda)^2 f(\lambda x) \, d\lambda,$$

..................................................,

et il vient ainsi

$$P_n = \frac{x^{2n+p+1}}{1.2\ldots p-1.2.4\ldots 2n} \int_0^1 \int_0^1 (1-\lambda^2)^n (1-\lambda_1)^{p-1} \lambda_1^{2n+1} \cos \lambda\lambda_1 x \, d\lambda \, d\lambda_1.$$

Mais, sous un point de vue plus général, supposons les $i$ polynomes : $\Phi_m(x)$, $\Phi_n(x)$, ..., $\Phi_r(x)$ des degrés $m$, $n$, ..., $r$ déterminés de manière que le développement suivant les puissances croissantes de la variable de la fonction

$$f(x) = e^{\alpha x} \Phi_m(x) + e^{\beta x} \Phi_n(x) + \ldots + \Phi_r(x)$$

# SUR L'IRRATIONALITÉ

DE LA

# BASE DES LOGARITHMES HYPERBOLIQUES.

*Report of the British Association for Advancement of Science*
(43th meeting, p. 22-23, 1873).

On reconnaîtra volontiers que, dans le domaine mathématique, la possession d'une vérité importante ne devient complète et définitive qu'autant qu'on a réussi à l'établir par plus d'une méthode. A cet égard la théorie des fonctions elliptiques offre un exemple célèbre, présent à tous les esprits, mais qui est loin d'être unique dans l'Analyse.

Je citerai encore le théorème de Sturm, resté comme enveloppé d'une sorte de mystère jusqu'à la mémorable découverte de M. Sylvester, qui a ouvert, pour pénétrer au cœur de la question, une voie plus facile et plus féconde que celle du premier inventeur. Telles sont encore, dans l'Arithmétique supérieure, les lois de réciprocité entre deux nombres premiers, auxquelles est attaché le nom à jamais illustre d'Eisenstein. Mais dans cette même science et pour des questions du plus haut intérêt, comme la détermination du nombre des classes de formes quadratiques de même invariant, on a été moins heureux, et jusqu'ici le mérite de la première découverte est resté sans partage à Dirichlet. Enfin, et pour en venir à l'objet de cette Note, je citerai encore dans le champ de l'Arithmétique, la proposition de Lambert sur l'irrationalité du rapport de la circonférence au diamètre, et des puissances de la base des logarithmes hyperboliques. Ayant été récemment conduit à m'occuper de ce dernier nombre, j'ai l'honneur de soumettre à la réu-

**Chudnovsky , *circa* 1980**

$$g(x) = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\left|g(x)-\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right| \leq \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}^2} \frac{1}{a^{2n+1}}$$

$$\left|g(-1)P_n(-1)-Q_n(-1)\right| \leq \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \leq \frac{1}{4^n}$$

$$d_n.\left|g(-1)Q_n(-1)-P_n(-1)\right| \leq \frac{3^n}{4^n}$$

$$\ln(2) \notin \mathbb{Q}$$

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   2.2 Des Arts Florissants…
   2.3 ...Au Cantor

3. L'Outil des Grandes Découvertes

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

**5. Alternatives Pratiques :
Géométriques, Mécaniques, Numériques ?**

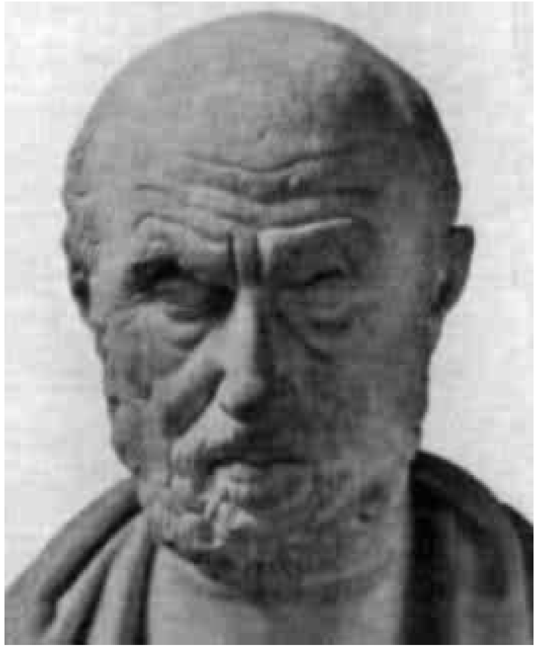
## Partie II : Étude de Cas.
## Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes.
## Quelques exemples

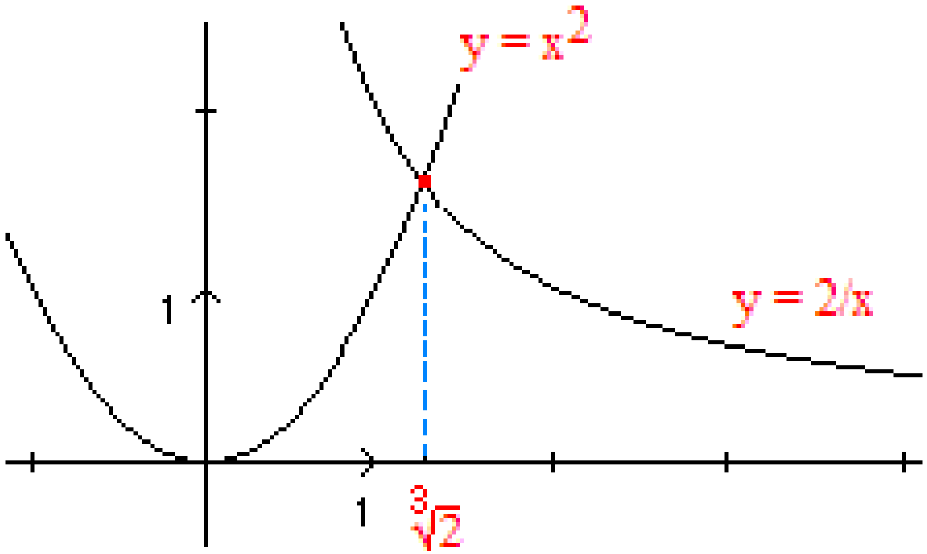
- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

*Et pour une autre fois…*
**Euler dans tous ses Zéta !**



# Hippocrate de Chios (- 470, - 410)

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$




Ménechme
(- 380, - 320)

$$x^3 + b\,x = c \qquad (1)$$

$$x^3 + c = b\,x \qquad (2)$$

$$x^3 = b\,x + c \qquad (3)$$

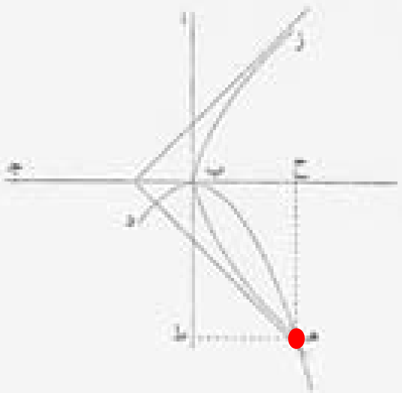
$$x^3 + a\,x^2 = c \qquad (4)$$

$$x^3 + c = a\,x^2 \qquad (5)$$

$$x^3 = a\,x^2 + c \qquad (6)$$

مكعب ح ب مساوياً للمجسّم الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه جـ ح، لأن ارتفاعيهما مكافئان لقاعدتيهما. لكن هذا المجسم مساوٍ للمجسم الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ب جـ الذي عملناه مساوياً للعدد المفروض، والمجسم الذي يحيط به قاعدةٌ مساويةٌ لمربع ا ب وارتفاع ب ح الذي هو مثل عدة الأضلاع المفروضة لمكعب ب ح. فمكعب ب ح مثل العدد المفروض ومثل عدة أضلاعه المفروضة؛ وذلك المرادُ.

فقد تبين أنه ليس لهذا الصنف اختلافٌ وقوع ولا فيه شيء يستحيل، أعني في مسائله. وقد خرج بخواصّ قطعين، مكافئ وزائدٍ معاً.




الصنف الرابع من الأصناف الستة الثلاثية: مكعب وأموال تعدل عدداً.

نفرض خط ا ب لعدة الأموال / ونعمل مكعباً مساوياً للعدد المفروض، وليكن ضلعه ح. ونُخرج ا ب على استقامة، ونجعل ب ط مثل ح. ونتمم مربع ب ط د جـ، ونعمل على نقطة د قطعاً زائداً لا يلقاه ب جـ ب ط، / وهو

1 مكعب: في الهامش مع «صح» [ك] / جـ ح: ح جـ [ا، ن] / لأن: ناقصة [س] – 1-3 جـ ح لأن ... مربع ا ب وارتفاعه: ناقصة [ك] – 4 والمجسم: معطوف على قوله: للمجسم / قاعدة: قاعدته [ا، س، ن] / وارتفاع: وارتفاعه [س، ن] – 6 ومثل: مثل [ا] / المراد: ما أردنا [ن] – 7 يستحيل: مستحيل [ن، ك] – 8 أعني في: من [ا] / مكافئ: ناقصة [ك] – 9 الأصناف: أصناف [ن] / عدداً: أعداداً [ك، ن] – 10 الأموال: للأموال [ب] – 11 وليكن: وليكن [س] / ح (الأولى والثانية): ح [س] / وتتمم: وتتم [ك، با] – 12 على نقطة: عليه نقطة [ك]

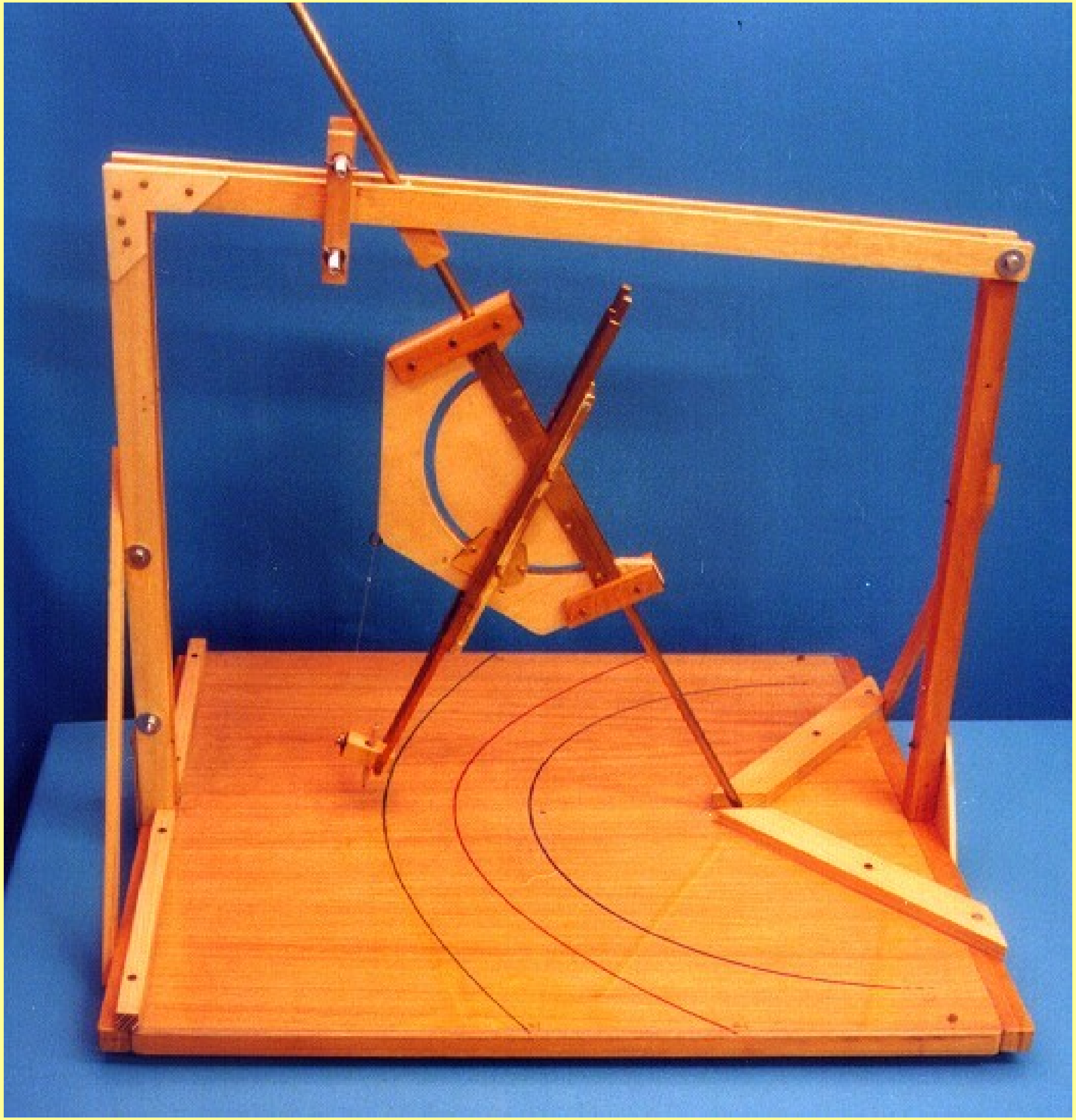
$$x^3 = bx + c \qquad (3)$$

$$x^4 = bx^2 + cx$$

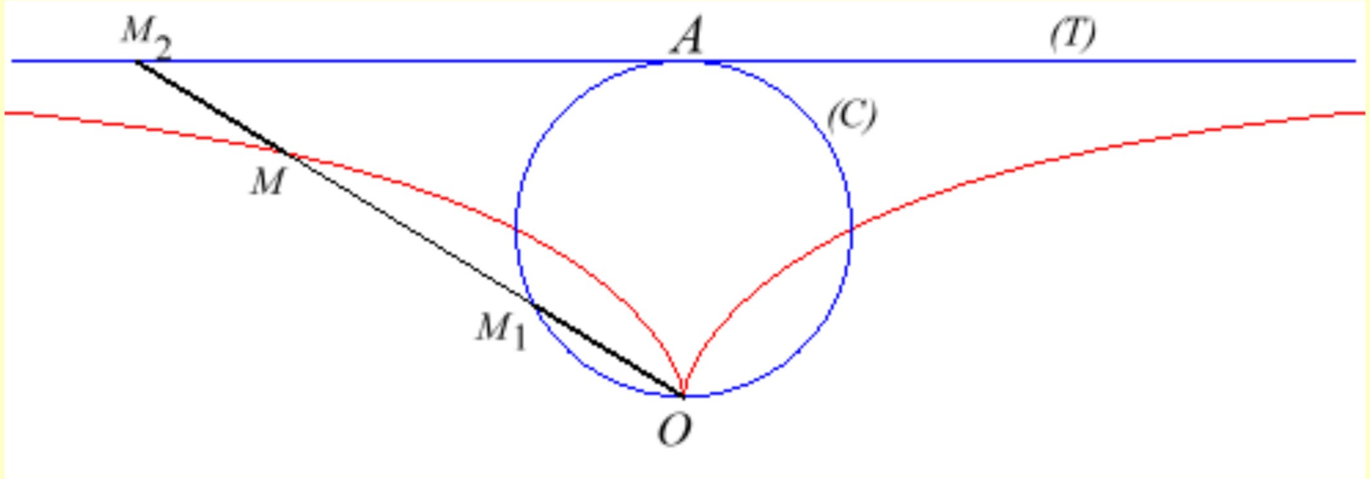
$$y = x^2 \qquad (\mathcal{P})$$

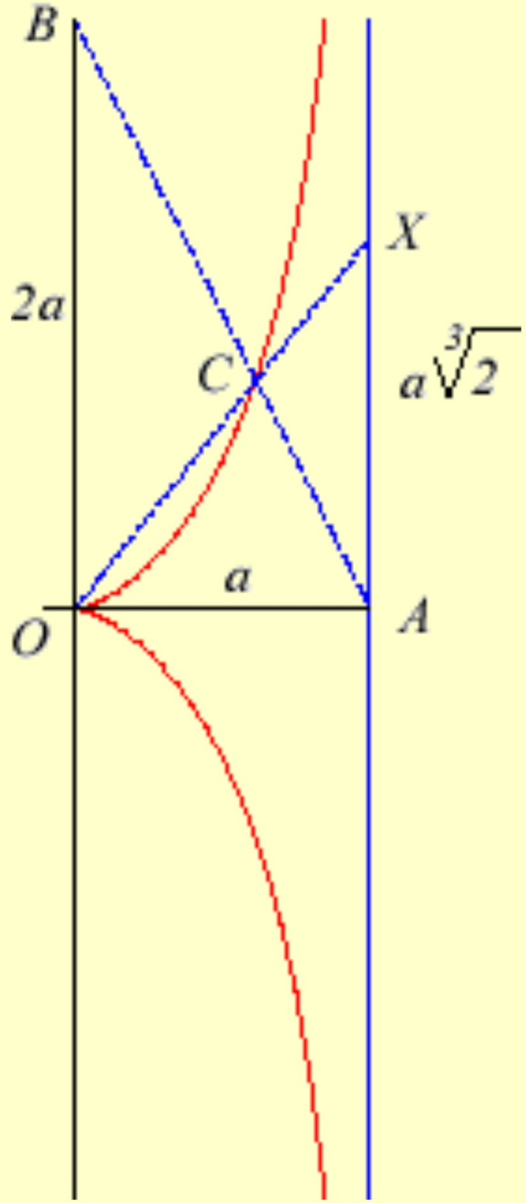
$$y^2 = bx^2 + cx \qquad (\mathcal{H})$$

# Al-Kuhi (940, 1000)

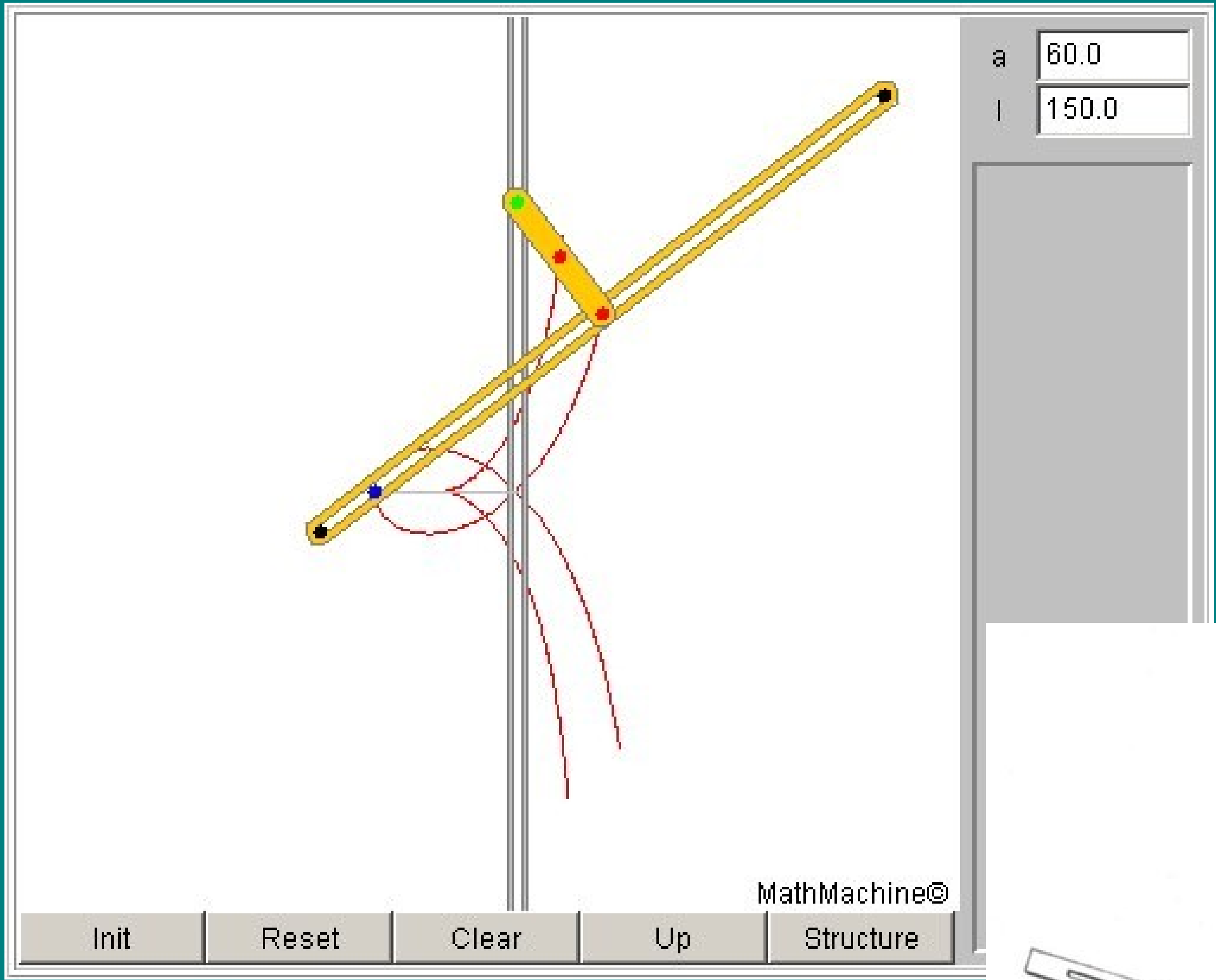


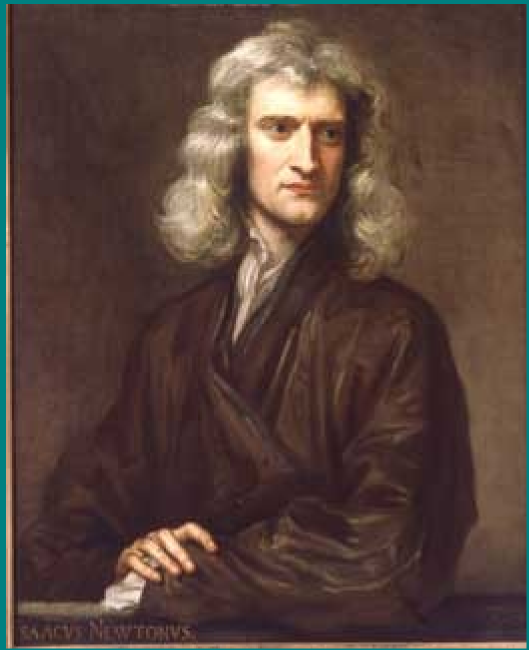
# Dioclès (-240, -180)

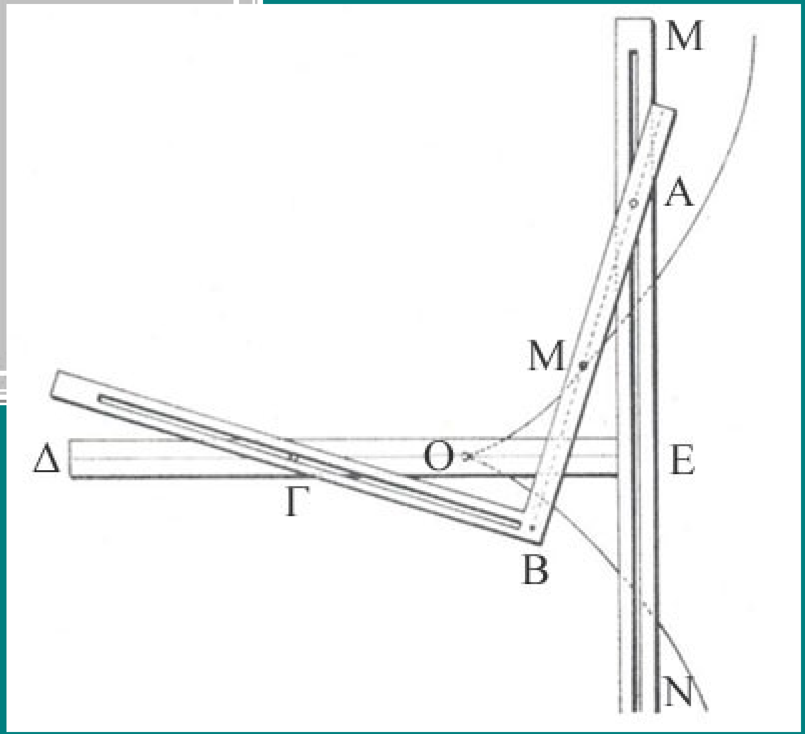



$$(x^2 + y^2)\,x - a\,y^2 = 0$$

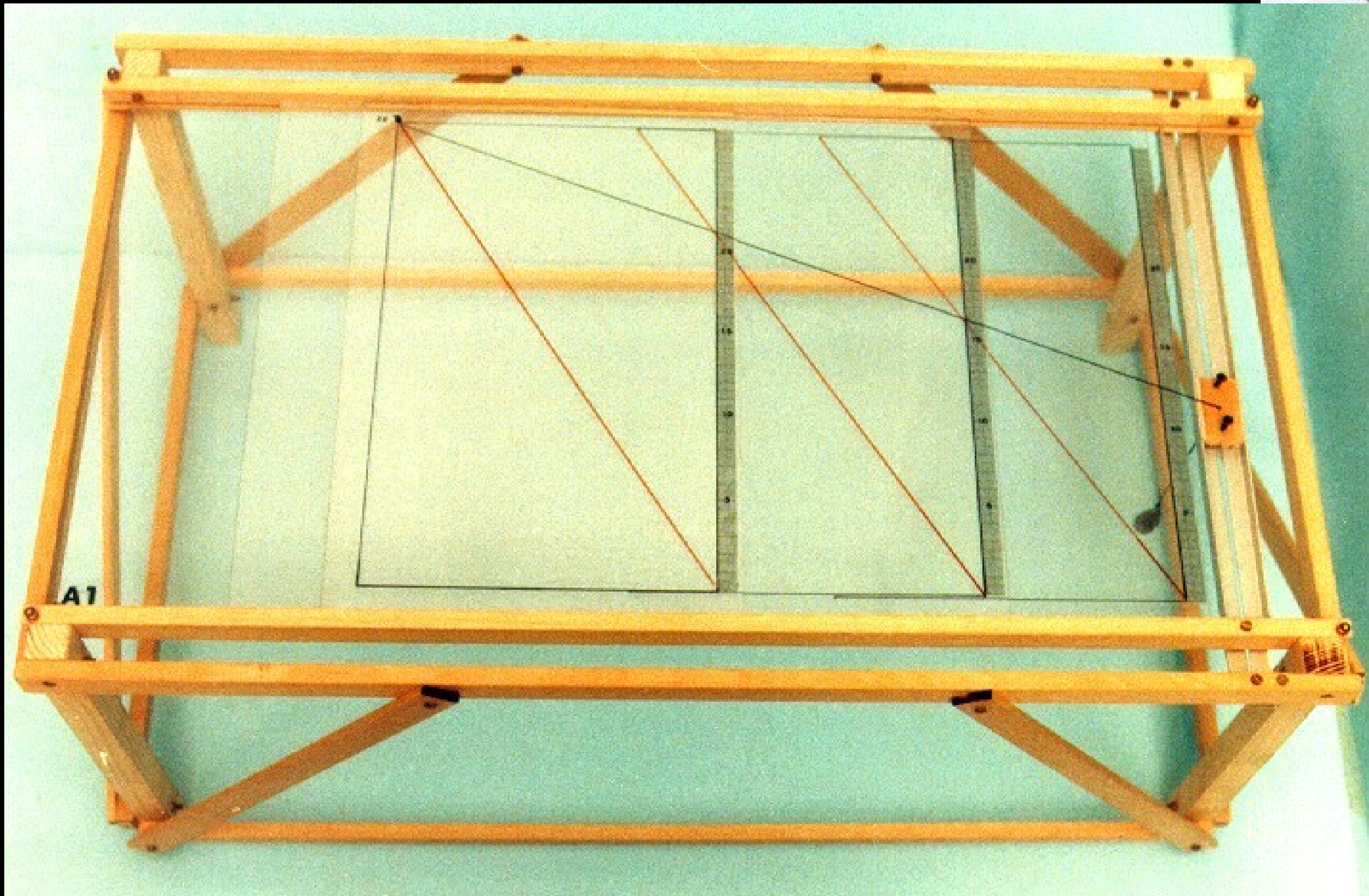

a
60.0
l
150.0
MathMachine©
Init
Reset
Clear
Up
Structure


ISAACVS NEWTONVS

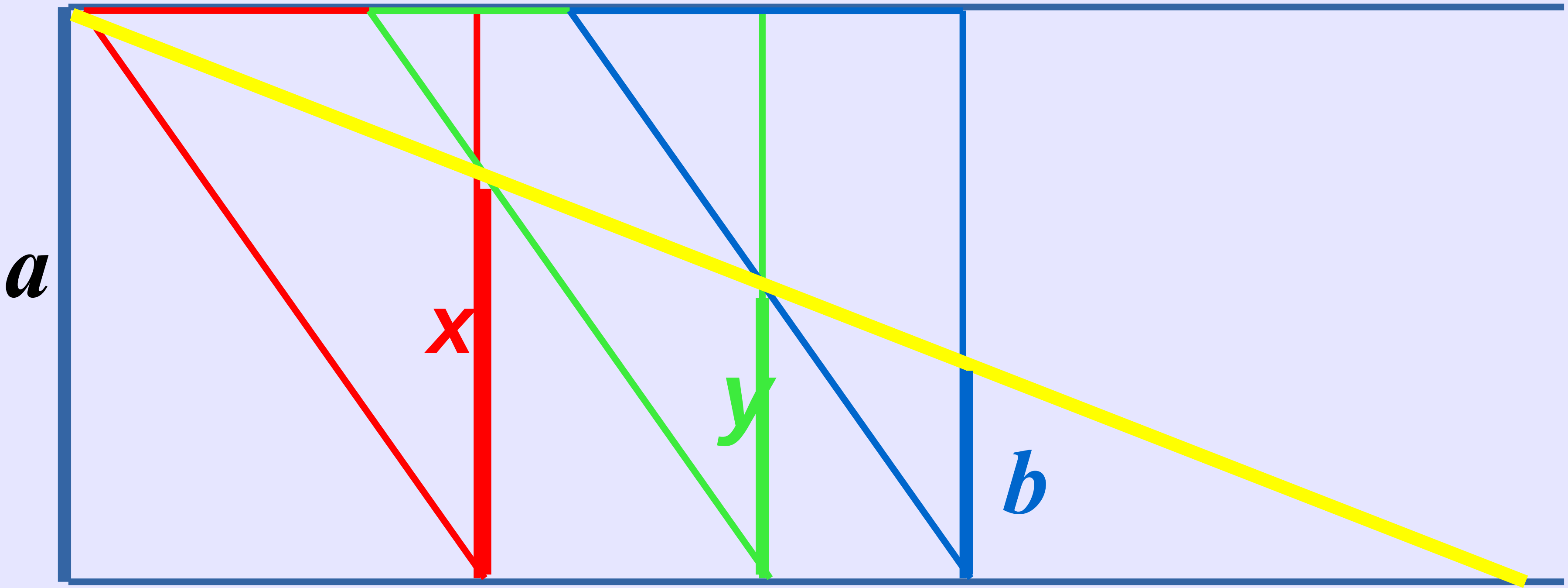

M
A
M
Δ
O
E
Γ
B
N

# Eratosthène (-276, -194)

## et son ***Mésolabe***



# Le Mésolabe: Principe




$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

# Constructeur Universel d'Equations.

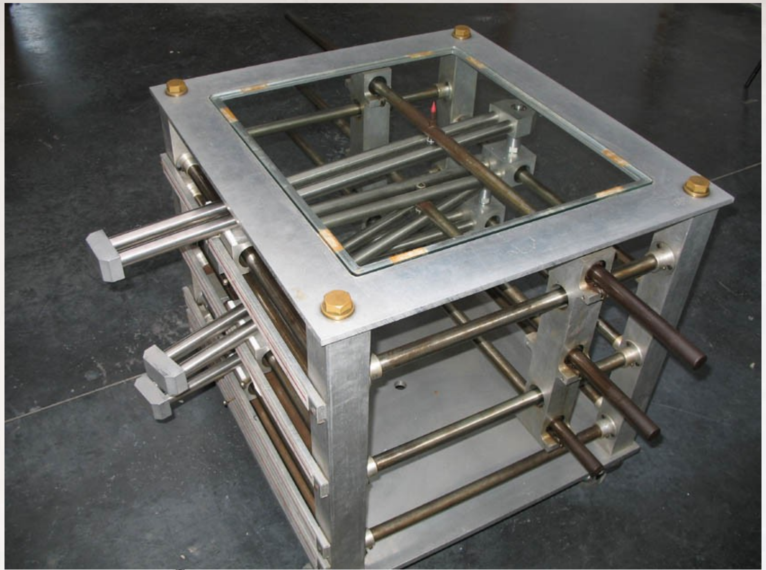


Fig. 2.

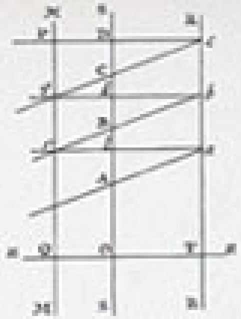
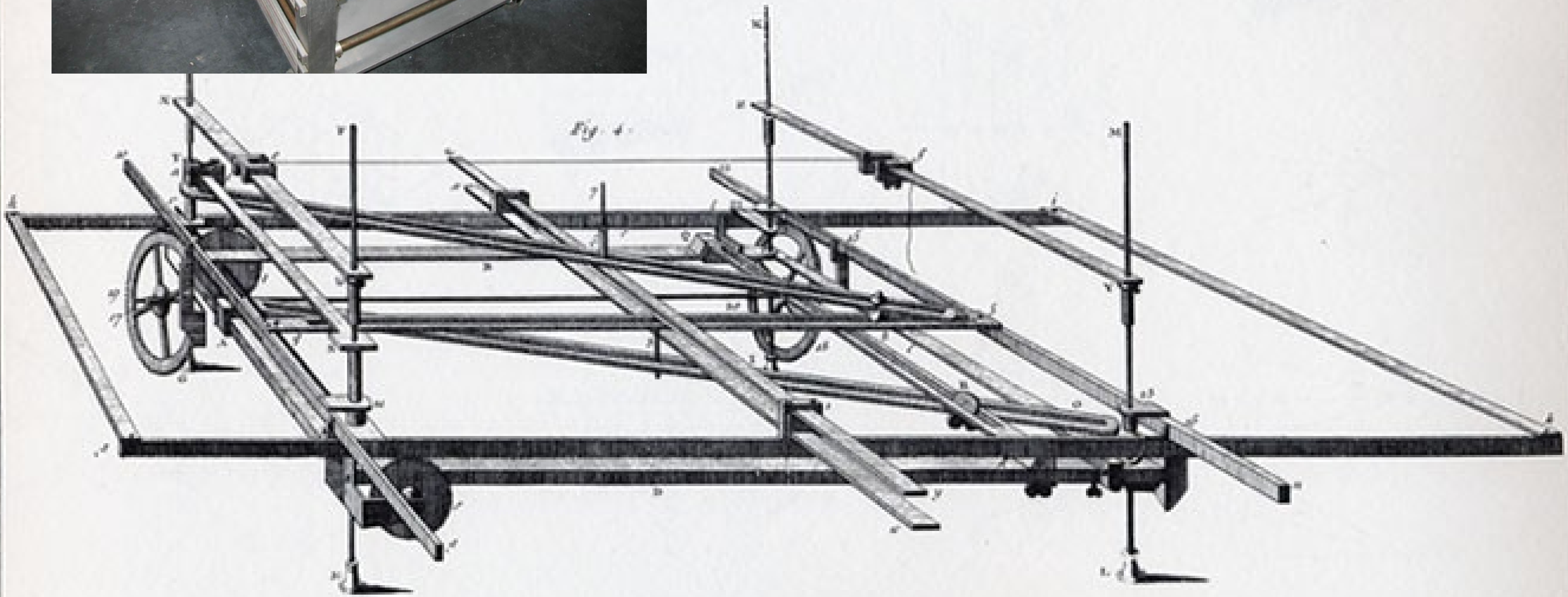
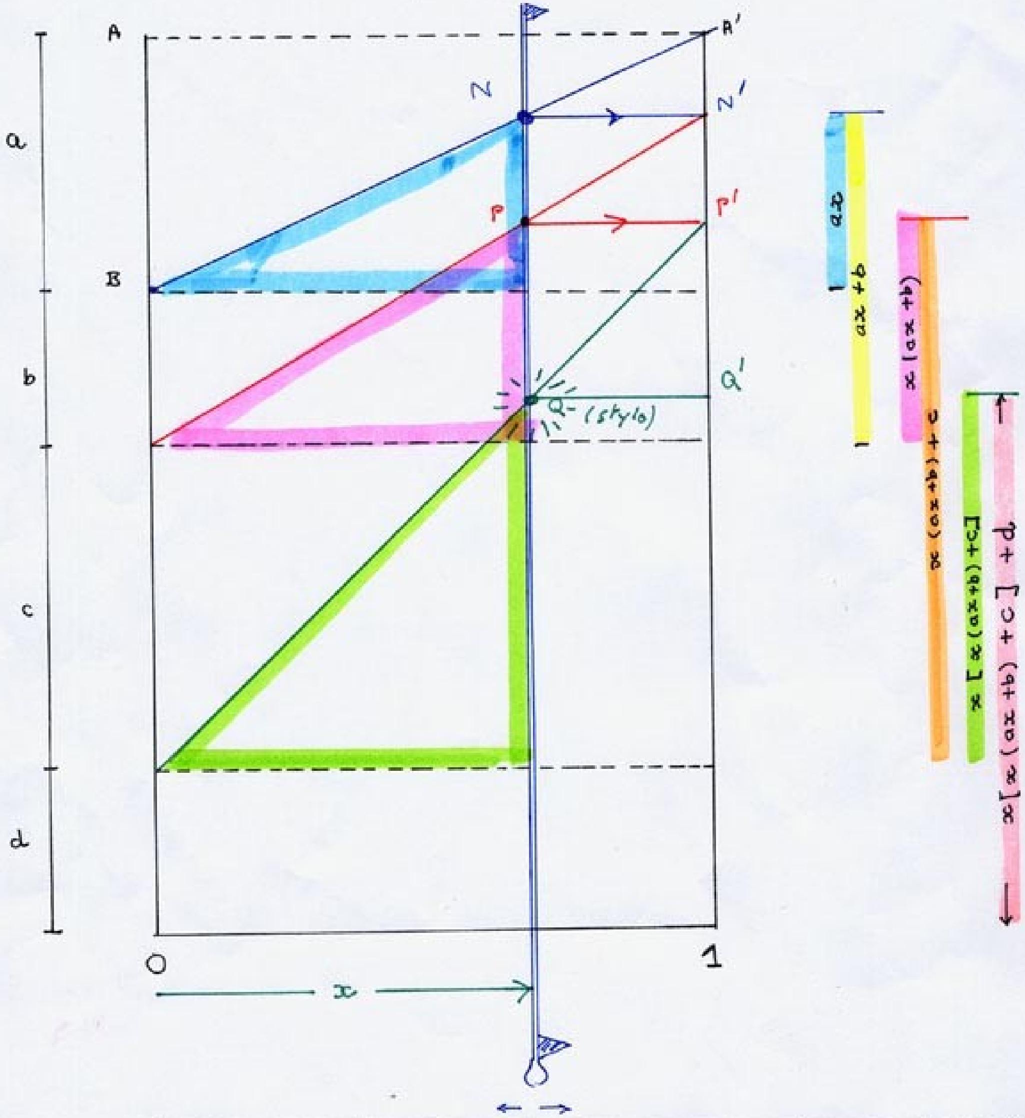


Fig. 3.

Fig. 4.

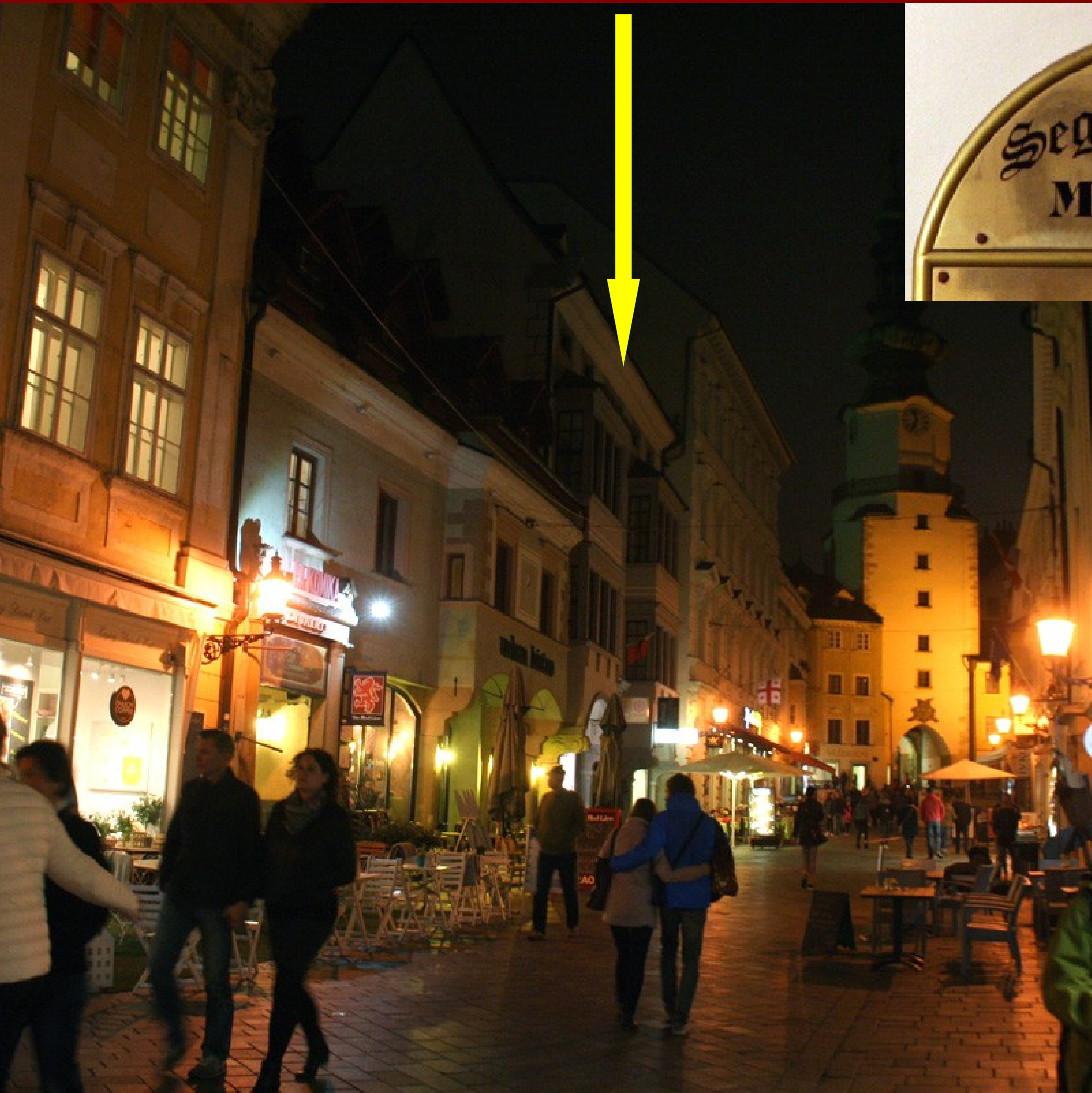


Algebre.

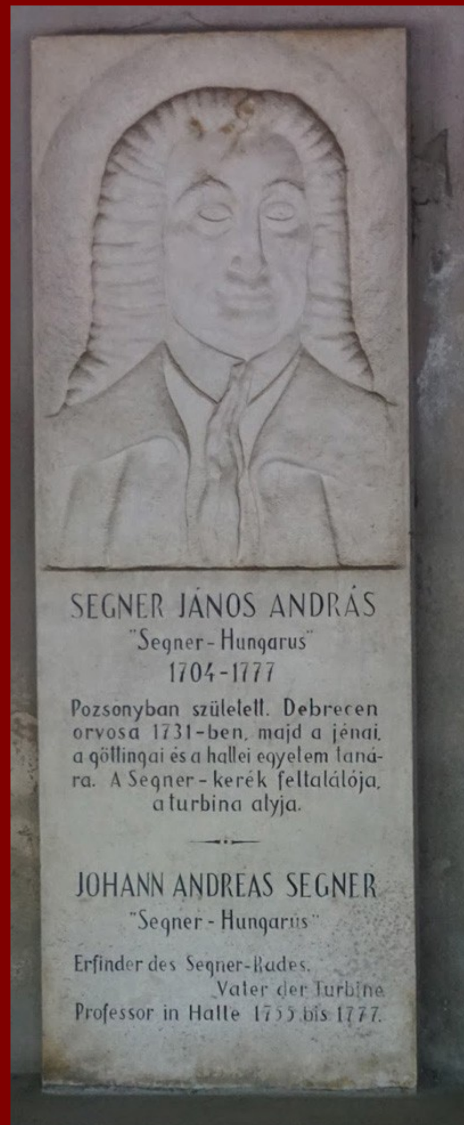



| | |
|---|---|
| $a.x^3 + b.x^2 + c.x + d =$ | 6 × ! |
| $x.[x.(a.x + b) + c] + d$ | 3 × |

Janos SEGNER (1704 - 1777) : 1761
Encyclopédie de d'ALEMBERT : 1784
William . G. HORNER (1786 - 1837)



Segnerova kúria
Michalská 7

SEGNER JÁNOS ANDRÁS
"Segner-Hungarus"
1704-1777
Pozsonyban született. Debrecen orvosa 1731-ben, majd a jénai, a göttingai és a hallei egyetem tanára. A Segner-kerék feltalálója, a turbina atyja.
JOHANN ANDREAS SEGNER
"Segner-Hungarus"
Erfinder des Segner-Rades.
Vater der Turbine
Professor in Halle 1755 bis 1777.

# Al-Kashi (1380-1429)

Mathématicien du Prince Ulugh-Beg

$$4x^3 - 3x + b = 0$$

$$x = \frac{4x^3 + b}{3}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{4.0^3 + b}{3}$$

$$x_2 = \frac{4x_1^3 + b}{3}$$

$$x_3 = \frac{4x_2^3 + b}{3}$$

$$x = \frac{4x^3 + 0.0523359562\ldots}{3}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0.01744\ldots\ldots\ldots$$

$$x_2 = 0.01745239\ldots\ldots$$

$$x_3 = 0.017452406426\ldots$$

$$x_4 = 0.017452406437\ldots$$

# Promenade(s) dans l'Irrationnel

## Partie I : Tour Panoramique

1. Coup d'oeil d'ensemble

2. De la Géométrie à l'Algèbre

   2.1 Des Racines et des Problèmes
   2.2 Des Arts Florissants…
   2.3 ...Au Cantor

3. L'Outil des Grandes Découvertes

   3.1 (Introduction aux) Fractions Continues
   3.2 Le Moyen le plus Naturel de la Théorie…

4. Plus Simple… ou Moins Naturel ?

5. Alternatives Pratiques :
   Géométriques, Mécaniques, Numériques ?

## Partie II : Étude de Cas.
## Le Nombre *e*, niveau lycée

- **Euler** à la découverte
- **Fourier**
- **Hermite** « à la Padé »
- Retour à **Euler**

## Partie III : Étude de Textes.
## Quelques exemples

- **Platon**, *Ménon*
- **Klein** sur la constructibilité et la duplication, *Leçons sur… #1*
- **Lagrange**, *Sur la Résolution des Équations Numériques*
- **Klein** présente **Cantor**, *Leçons sur… #2*

***Et pour une autre fois…***

**Euler dans tous ses Zéta !**

À retrouver prochainement sur...

http://www.mathouriste.eu/Irrationnel/promenade_irrat.html

*Une BIBLIO complète vous y attend déjà !*