
SUR LA RÉOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES (*).

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin*, t. XXIII, 1769.)

Viète est le premier qui ait tâché de donner une méthode générale pour résoudre les équations numériques; mais, quoique cette méthode ait été ensuite perfectionnée et simplifiée à quelques égards par Harriot, Oughtred, Pell, etc., elle est encore si compliquée et si rebutante par le grand nombre d'opérations qu'elle demande, que les Géomètres paraissent l'avoir entièrement abandonnée. Celle que l'on suit communément est due à Newton, et elle est très-facile et très-simple. Il faut supposer seulement qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine qu'on cherche, approchée au moins jusqu'à sa dixième partie près; alors on égale cette valeur, plus une nouvelle inconnue, à celle de l'équation proposée, et, faisant la substitution, on a une seconde équation dont la racine est ce qu'il faudrait ajouter à la première racine approchée pour avoir la racine exacte; mais comme, par l'hypothèse, ce qui reste à ajouter à la première valeur de la racine est moindre qu'un dixième de cette racine, on peut, dans l'équation dont il s'agit, négliger le carré et les puissances plus hautes de l'inconnue; de sorte que, l'équation étant ainsi réduite au premier degré, on aura sur-le-champ la valeur de l'inconnue en déci-

(*) Lu à l'Académie le 20 avril 1769.

males; cette valeur ne sera qu'approchée, mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la première, et ainsi de suite. De cette manière, on trouve à chaque opération de nouvelles décimales à ajouter ou à retrancher de la valeur de la racine déjà trouvée, et l'on a par conséquent cette racine d'autant plus exactement qu'on pousse le calcul plus loin.

On peut aussi, comme l'a pratiqué Halley, revenir toujours à la première équation proposée, en y substituant à la place de l'inconnue la valeur de la racine de plus en plus approchée et augmentée d'un reste inconnu, ce qui paraît en quelque façon plus simple et plus commode.

Telle est la méthode usitée pour résoudre les équations numériques par approximation. Plusieurs savants Géomètres se sont appliqués à la rendre encore plus exacte et plus facile, soit en ayant égard aux termes où l'inconnue est au second degré, soit en donnant des formules générales à l'aide desquelles on puisse trouver sur-le-champ la valeur de la fraction qui est le reste à ajouter à la racine approchée; mais aucun d'eux ne paraît avoir fait attention aux inconvénients ou plutôt aux imperfections qui se trouvent encore dans cette méthode; du moins personne, que je sache, n'a donné jusqu'à présent les moyens d'y remédier.

La première et la principale de ces imperfections consiste en ce qu'il faut supposer qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine cherchée, approchée jusqu'à sa dixième partie près; car, comme on n'a point encore de règle générale et sûre pour trouver, dans une équation quelconque, la valeur approchée de chacune de ses racines réelles, la méthode dont il s'agit n'est proprement applicable qu'aux cas où l'on connaît d'avance à peu près la valeur de la racine qu'on cherche. Il est vrai que Rolle a donné une méthode, qu'on appelle *des cascades*, pour approcher des racines des équations numériques aussi près que l'on veut; mais cette méthode n'est pas toujours sûre, surtout lorsqu'il y a dans l'équation des racines imaginaires; auquel cas elle laisse toujours en doute si ces racines sont réelles ou non. (Voyez l'*Algèbre* de Rolle, chap. III et VI du livre II.)

répondre qu'une seule valeur de α ; donc, dans ce cas, les deux équations (H) ne pourront avoir qu'une seule racine commune, et par conséquent leur plus grand commun diviseur ne pourra être que du premier degré.

On poussera donc la division jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α ne se trouve plus qu'à la première dimension, et l'on fera ensuite ce reste égal à zéro, ce qui donnera la valeur cherchée de α .

Mais si, parmi les valeurs de β tirées de l'équation (G), il y en a, par exemple, deux d'égales entre elles, alors, comme à chacune de ces valeurs égales de β il peut répondre des valeurs différentes de α , il faudra qu'en mettant cette valeur double de β dans les équations (H) elles puissent avoir lieu par rapport à l'une et à l'autre des valeurs de α qui y répondent; ainsi, ces deux équations auront nécessairement deux racines communes, et par conséquent leur plus grand commun diviseur sera du second degré. Il faudra donc, dans ce cas, ne pousser la division que jusqu'à ce qu'on arrive à un reste où α se trouve à la seconde dimension seulement, et alors on fera ce reste égal à zéro, ce qui donnera une équation du second degré par laquelle on déterminera les deux valeurs de α , lesquelles seront nécessairement toutes deux réelles.

De même, s'il y avait trois valeurs égales de β , il faudrait, pour trouver les valeurs de α qui répondraient à cette valeur triple de β , ne pousser la division que jusqu'à ce que l'on parvint à un reste où la plus haute puissance de α fût la troisième; et alors, faisant ce reste égal à zéro, on aurait une équation en α du troisième degré, laquelle donnerait les trois valeurs réelles de α correspondantes à la même valeur de β , et ainsi de suite.

§ III. — *Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques.*

18. Soit l'équation

$$(a) \quad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + K = 0,$$

et supposons qu'on ait déjà trouvé par la méthode précédente ou autre-

ment la valeur entière approchée d'une de ses racines réelles et positives; soit cette première valeur p , en sorte que l'on ait

$$x > p \quad \text{et} \quad x < p + 1;$$

on fera

$$x = p + \frac{1}{y},$$

et, substituant cette valeur dans l'équation proposée, à la place de x , on aura, après avoir multiplié toute l'équation par y^m et ordonné les termes par rapport à y , une équation de cette forme

$$(b) \quad A' y^m + B' y^{m-1} + C' y^{m-2} + \dots + K' = 0.$$

Or, comme, par hypothèse, $\frac{1}{y} > 0$ et < 1 , on aura $y > 0$; donc l'équation (b) aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité.

On cherchera donc par les méthodes du § I la valeur entière approchée de cette racine, et, comme cette racine doit être nécessairement positive, il suffira de considérer y comme positif (4).

Ayant trouvé la valeur entière approchée de y , que je nommerai q , on fera ensuite

$$y = q + \frac{1}{z},$$

et, substituant cette valeur de y dans l'équation (b), on aura une troisième équation en z de cette forme

$$(c) \quad A'' z^m + B'' z^{m-1} + C'' z^{m-2} + \dots + K'' = 0,$$

laquelle aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité, dont on pourra trouver de même la valeur entière approchée.

Cette valeur approchée de z étant nommée r , on fera

$$z = r + \frac{1}{u},$$

et substituant on aura une équation en u qui aura au moins une racine réelle plus grande que l'unité, et ainsi de suite.

En continuant de la même manière, on approchera toujours de plus en plus de la valeur de la racine cherchée; mais, s'il arrive que quel-
qu'un des nombres p, q, \dots soit une racine exacte, alors on aura $x = p$
ou $y = q, \dots$, et l'opération sera terminée; ainsi, dans ce cas, on trouvera
pour x une valeur commensurable.

Dans tous les autres cas la valeur de la racine sera nécessairement in-
commensurable, et l'on pourra seulement en approcher aussi près qu'on
voudra.

19. Si l'équation proposée a plusieurs racines réelles positives, on
pourra trouver, par les méthodes exposées dans le § I, la valeur entière
approchée de chacune de ces racines; et nommant ces valeurs p, p', p'', \dots ,
on les emploiera successivement pour approcher davantage de la vraie
valeur de chaque racine; il faudra seulement remarquer :

1° Que si les nombres p, p', p'', \dots sont tous différents l'un de l'autre,
alors les transformées $(b), (c), \dots$ du numéro précédent n'auront chacune
qu'une seule racine réelle et plus grande que l'unité; car si, par exemple,
l'équation (b) avait deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles
que y' et y'' , on aurait donc

$$x = p + \frac{1}{y'} \quad \text{et} \quad x = p + \frac{1}{y''},$$

de sorte que ces deux valeurs de x auraient la même valeur entière
approchée p contre l'hypothèse; il en serait de même si l'équation (c) ,
ou quelqu'une des suivantes, avait deux racines réelles plus grandes
que l'unité.

De là il s'ensuit que, pour trouver dans ce cas les valeurs entières
approchées q, r, \dots des racines des équations $(b), (c), \dots$, il suffira de
substituer successivement à la place de y, z, \dots les nombres naturels po-
sitifs 1, 2, 3, ... jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécu-
tives qui donnent des résultats de signe contraire (6);

2° Que s'il y a deux valeurs de x qui aient la même valeur entière
approchée p , alors, en employant cette valeur, les équations $(b), (c), \dots$
auront chacune deux racines réelles plus grandes que l'unité, jusqu'à ce

$\alpha + \beta \sqrt{-1}$, nous avons donné, dans le § II, le moyen de trouver les équations dont α et β sont les racines; ainsi il n'y aura qu'à chercher les racines réelles de ces équations, et l'on aura la valeur de toutes les racines imaginaires de l'équation proposée.

21. Pour faciliter les substitutions (18) de $p + \frac{1}{y}$ au lieu de x , de $q + \frac{1}{z}$ au lieu de y , ..., il est bon de remarquer que les coefficients de la transformée (b) peuvent se déduire immédiatement de ceux de l'équation (a) en cette sorte

$$\begin{aligned} A' &= Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \dots, \\ B' &= mA p^{m-1} + (m-1)B p^{m-2} + (m-2)C p^{m-3} + \dots, \\ C' &= \frac{m(m-1)}{2} A p^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} B p^{m-3} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On aura de même ceux de la transformée (c) par ceux de la transformée (b) en mettant dans les formules précédentes q à la place de p , A'' , B'' , C'' , ... à la place de A' , B' , C' , ..., et A' , B' , C' , ... à la place de A , B , C , ..., et ainsi de suite.

De là il est évident que le premier coefficient A' , ou A'' , ou ..., ne sera jamais nul, à moins que le nombre p , ou q , ou ..., ne soit une racine exacte, auquel cas nous avons vu que la fraction continue se termine à ce nombre (18). En effet, si $A' = 0$, ou $A'' = 0$, ou ..., on aura $y = \infty$, ou $z = \infty$, ou ..., donc $x = p$, ou $y = q$, ou ...

22. Soient donc p, q, r, s, t, \dots les valeurs entières approchées des équations (a), (b), (c), ..., en sorte que l'on ait

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \quad z = r + \frac{1}{u}, \dots,$$

et, substituant successivement ces valeurs dans celle de x , on aura

$$x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \dots}}}$$

Ainsi la valeur de x , c'est-à-dire de la racine cherchée, sera exprimée par une fraction continue. Or, on sait que ces sortes de fractions donnent toujours l'expression la plus simple, et en même temps la plus exacte qu'il est possible, d'un nombre quelconque soit rationnel ou irrationnel.

M. Huygens paraît être le premier qui ait remarqué cette propriété des fractions continues, et qui en ait fait usage pour trouver les fractions les plus simples, et en même temps les plus approchantes d'une fraction quelconque donnée (*voyez son Traité De Automato planetario*).

Plusieurs habiles Géomètres ont ensuite développé davantage cette théorie, et en ont fait différentes applications ingénieuses et utiles; mais on n'avait pas encore pensé, ce me semble, à s'en servir dans la résolution des équations.

23. Maintenant, si l'on réduit les fractions continues

$$\frac{p}{1}, \quad p + \frac{1}{q}, \quad p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}, \dots$$

en fractions ordinaires, on aura, en faisant

$$\begin{aligned} \alpha &= p, & \alpha' &= 1, \\ \beta &= q\alpha + 1, & \beta' &= q\alpha' = q, \\ \gamma &= r\beta + \alpha, & \gamma' &= r\beta' + \alpha', \\ \delta &= s\gamma + \beta, & \delta' &= s\gamma' + \beta', \\ & \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

on aura, dis-je, cette suite de fractions particulières

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'}, \dots\dots$$

lesquelles seront nécessairement convergentes vers la vraie valeur de x , et dont la première sera plus petite que cette valeur, la seconde sera plus grande, la troisième plus petite, et ainsi de suite; de sorte que la valeur cherchée se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; c'est ce qu'il est aisé de déduire de la nature même de la fraction continue d'où celles-ci sont tirées.

Or, il est facile de voir que les valeurs de

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$$

sont toujours telles que

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1, \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1, \quad \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1, \dots;$$

d'où il s'ensuit:

1° Que ces fractions sont déjà réduites à leurs moindres termes; car, si γ et γ' , par exemple, avaient un commun diviseur autre que l'unité, il faudrait, en vertu de l'équation

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1,$$

que l'unité fût aussi divisible par ce même diviseur;

2° Qu'on aura

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}, \quad \frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}, \dots,$$

de sorte que les fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \dots$$

ne peuvent jamais différer de la vraie valeur de x que d'une quantité respectivement moindre que

$$\frac{1}{\alpha'\beta'}, \quad \frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{1}{\gamma'\delta'}, \dots;$$

d'où il sera facile de juger de la quantité de l'approximation.

En général, puisque $\beta' > \alpha'$, $\gamma' > \beta'$, ..., on aura

$$\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}, \quad \frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}, \dots,$$

d'où l'on voit que l'erreur de chaque fraction sera toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la même fraction;

3° Que chaque fraction approchera de la valeur de x , non-seulement plus que ne fait aucune des fractions précédentes, mais aussi plus que ne pourrait faire aucune autre fraction quelconque qui aurait un moindre

dénominateur. En effet, si la fraction $\frac{\mu}{\mu'}$, par exemple, approchait plus que la fraction $\frac{\delta}{\delta'}$, δ' étant $> \mu'$, il faudrait que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvât entre ces deux $\frac{\gamma}{\gamma'}$ et $\frac{\delta}{\delta'}$; donc

$$\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma' \delta'} \quad \text{et} \quad > 0;$$

donc

$$\mu \gamma' - \mu' \gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1 \quad \text{et} \quad > 0,$$

ce qui ne se peut.

24. Les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ... peuvent être appelées fractions *principales*, parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur cherchée; mais, quand les nombres p , q , r , ... diffèrent de l'unité, on peut encore trouver d'autres fractions convergentes vers la même valeur, et qu'on appellera, si l'on veut, fractions *secondaires*.

Par exemple, si r est > 1 , on peut entre les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$, qui sont toutes deux moindres que la valeur de x , insérer autant de fractions secondaires qu'il y a d'unités dans $r - 1$, en mettant successivement 1, 2, 3, ..., $r - 1$ au lieu de r . De cette manière, à cause de $\gamma = r\beta + \alpha$ et $\gamma' = r\beta' + \alpha'$, on aura cette suite de fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta + \alpha}{\beta' + \alpha'}, \quad \frac{2\beta + \alpha}{2\beta' + \alpha'}, \quad \frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}, \quad \dots, \quad \frac{r\beta + \alpha}{r\beta' + \alpha'},$$

dont les deux extrêmes sont les deux fractions *principales* $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, et dont les intermédiaires sont des fractions *secondaires*.

Or, si l'on prend la différence entre deux fractions consécutives quelconques de cette suite, comme entre $\frac{2\beta + \alpha}{2\beta' + \alpha'}$ et $\frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}$, on trouvera

$\frac{1}{(2\beta' + \alpha')(3\beta' + \alpha')}$, de sorte que cette différence sera toujours positive et ira en diminuant d'une fraction à l'autre; d'où il s'ensuit que, comme

§ IV. — *Application des méthodes précédentes à quelques exemples.*

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a résolue par sa méthode, savoir

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Je commence par chercher par les formules du n° 8 l'équation en v qui résulte de cette équation; je fais donc

$$m = 3, \quad A = 0, \quad B = -2, \quad C = 5;$$

j'aurai

$$n = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3,$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 4, \quad A_3 = 15, \quad A_4 = 8, \quad A_5 = 50, \quad A_6 = 91;$$

donc

$$a_1 = 12, \quad a_2 = 72, \quad a_3 = -1497,$$

et, de là,

$$a = 12, \quad b = 36, \quad c = -643;$$

de sorte que l'équation cherchée sera

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

Or, puisque cette équation n'a pas les signes alternativement positifs et négatifs, j'en conclus sur-le-champ que l'équation proposée a nécessairement deux racines imaginaires, et par conséquent une seule réelle (16).

Ainsi, les nombres à substituer à la place de x seront les nombres naturels 0, 1, 2, 3, ... (6).

Je suppose d'abord x positif, et je cherche la limite des valeurs de x par les méthodes du n° 12 : je trouve $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$; ainsi, 3 sera la limite cherchée en nombres entiers, de sorte qu'il suffira de faire successivement $x = 0, 1, 2, 3$, ce qui donnera ces résultats $-5, -6, -1, 16$; d'où l'on voit que la racine réelle de l'équation proposée sera entre les

nombres 2 et 3, et qu'ainsi 2 sera la valeur entière la plus approchée de cette racine (2).

Je fais maintenant, suivant la méthode du § III, $x = 2 + \frac{1}{y}$; j'ai, en substituant et ordonnant les termes par rapport à y , l'équation

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

dans laquelle j'ai changé les signes pour rendre le premier terme positif.

Cette équation aura donc nécessairement une seule racine plus grande que l'unité (19), de sorte que, pour en trouver la valeur approchée, il n'y aura qu'à substituer les nombres 0, 1, 2, 3, ... , jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signe contraire.

Pour ne pas faire beaucoup de substitutions inutiles, je remarque qu'en faisant $y = 0$ j'ai un résultat négatif, et qu'en faisant $y = 10$ le résultat est encore négatif; je commence donc par le nombre 10, et je fais successivement $y = 10, 11, \dots$. Je trouve d'abord les résultats $-61, 54, \dots$; d'où je conclus que la valeur approchée de y est 10; donc $q = 10$.

Je fais donc $y = 10 + \frac{1}{z}$, j'aurai l'équation

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0,$$

et, supposant successivement $z = 1, 2, \dots$, j'aurai les résultats $-54, 71, \dots$; donc $r = 1$.

Je fais encore $z = 1 + \frac{1}{u}$; j'aurai

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0,$$

et, supposant $u = 1, 2, \dots$, j'aurai les résultats $-71, 293, \dots$; donc $s = 1$, et ainsi de suite.

En continuant de cette manière, on trouvera les nombres

$$2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, \dots,$$

de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

d'où l'on tirera les fractions (23)

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}, \dots,$$

lesquelles seront alternativement plus petites et plus grandes que la valeur de x .

La dernière fraction $\frac{16415}{7837}$ est plus grande que la racine cherchée; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{(7837)^2}$ (23, 2°), c'est-à-dire moindre que 0,000 000 016 3; donc, si l'on réduit la fraction $\frac{16415}{7837}$ en fraction décimale, elle sera exacte jusqu'à la septième décimale; or, en faisant la division, on trouve 2,094 551 486 5, ...; ainsi, la racine cherchée sera entre les nombres 2,094 551 49 et 2,094 551 47.

Newton a trouvé par sa méthode la fraction 2,094 551 47 (*voyez sa Méthode des suites infinies*), d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un résultat fort exact; mais on aurait tort de se promettre toujours une pareille exactitude.

26. Quant aux deux autres racines de la même équation, nous avons déjà vu qu'elles doivent être imaginaires; néanmoins, si l'on voulait en trouver la valeur, on le pourrait par la méthode du n° 17.

Pour cela, on reprendra l'équation en φ trouvée ci-dessus, et, en y changeant φ en ω , on aura

$$\omega^3 + 12\omega^2 - 36\omega - 643 = 0,$$

et il ne s'agira plus que de chercher une racine réelle et positive de cette équation. Or, puisqu'elle a son dernier terme négatif, elle aura