Existence des nombres transcendants. Démonstration de M. Cantor

1. Représentons comme de coutume les nombres par les points d'un axe des abscisses. Si nous nous bornons aux nombres rationnels, les points correspondants rempliront l'axe des abscisses avec une "*densité parfaite*", c'est-à-dire que dans un intervalle, si petit qu'il soit, il y a une infinité de tels points. Néanmoins, comme les géomètres anciens l'avaient déjà reconnu, l'*ensemble continu* des points de l'axe n'est pas épuisé de cette manière; les nombres irrationnels s'introduisent entre les nombres rationnels, et la question se pose si, parmi les nombres irrationnels, il ne faut pas encore faire certaines différences.

Définissons d'abord ce qu'on entend par *nombres algébriques*. On appelle ainsi toute racine d'une équation algébrique

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = 0$$

dont les coefficients sont des nombres entiers, premiers entre eux. Bien entendu il n'est question que de racines réelles.

Les nombres rationnels en sont un cas particulier comme racines des équations la forme

$$a_0\omega + a_1 = 0$$

Les nombres algébriques réels forment-ils un ensemble continu, ou bien une suite discontinue, telle qu'on puisse insérer d'autres nombres dans ses intervalles? Ces nouveaux nombres, les nombres *transcendants*, seraient alors caractérisés par cette propriété de ne pouvoir être racines d'une équation algébrique entière à coefficients entiers.

Cette question a d'abord été résolue par Liouville (Comptes Rendus 1844, et Journal de Liouville, V.16, 1851); il a en effet démontré l'existence de nombres transcendants. Mais sa démonstration, qui s'appuie sur la théorie des fractions continues, est assez compliquée. La question devient beaucoup plus simple lorsqu'on se place au point de vue développé par M. Georges Cantor dans un mémoire d'une importance capitale : *Sur une propriété de l'ensemble des nombres algébriques réels* (Journal de Crelle, t. 77, 1873). Nous allons exposer sa démonstration, en utilisant une idée un peu plus simple, que M. cantor, sous une forme

différente il est vrai, avait signalée à l'assemblée des "Naturforscher" à Halle en 1891.

2. La démonstration repose sur cette propriété que les nombres algébriques forment un ensemble *énumérable*, tandis qu'il en est autrement des nombres transcendants. M. Cantor veut dire par là qu'on peut ranger les premiers dans un certain ordre, tel que chacun d'eux occupe une place déterminée, numérotée pour ainsi dire. Cette proposition peut aussi s'énoncer de la manière suivante :

On peut établir une correspondance univoque entre la multiplicité des nombres algébriques réels et la multiplicité des nombres entiers positifs.

Il semble qu'il y ait là une impossibilité. Les nombres entiers positifs ne forment qu'une partie des nombres algébriques réels; puisqu'à chaque nombre du premier ensemble on peut faire correspondre un nombre et un seul du second, la partie serait donc égale au tout. Cette objection repose sur une analogie inexacte. Le théorème qui dit que la partie est plus petite que le tout, n'est plus valable quand il s'agit de grandeurs en nombre infini. Il est bien évident par exemple qu'on peut établir une correspondance univoque entre les nombres entiers positifs et les nombres pairs positifs, il suffit d'écrire

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3\ldots n\ldots \\ 0 & 2 & 4 & 6\ldots 2n\ldots \end{array}$$

Quand il s'agit de quantités infinies, les mots *grand* et *petit* ne sont pas bien à leur place.

M. Cantor a proposé de les caractériser par leur *puissance* : *Deux collections infinies ont même puissance, lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance univoque.*

Le théorème que nous avons à démontrer prend alors la forme suivante :

L'ensemble des nombres algébriques réels a même puissance que l'ensemble des nombres entiers positifs.

On obtient l'ensemble des nombres algébriques réels en cherchant les racines de toutes les équations algébriques de la forme

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = 0$$

Tous les a sont supposés premiers entre eux, a_0 est positif et l'équation est irréductible.

Afin de ranger les nombres ainsi obtenus dans un certain ordre, nous considérons leur *hauteur* N, qui est représentée par

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$$

$|a_i|$ représente la valeur absolue de a_i. A un nombre donné N correspond un nombre fini d'équation algébriques. En effet, N étant donné, le nombre n a certainement une limite supérieure, puisque N est égal à $n-1$, augmenté de nombres positifs; en outre la différence $N-(n-1)$ est une somme de nombres positifs premiers entre eux, dont le nombre est évidemment fini.

Parmi ces équations, il faut écarter celles qui sont réductibles, ce qui n'offre théoriquement aucune difficulté.

Le nombre des équations correspondant à une valeur donnée de N étant limité il ne correspond à cette valeur qu'un nombre limité de nombres algébriques. Nous désignerons ce nombre par $\varphi(N)$. Le tableau ci-contre contient le calcul de $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$ et des nombres ω qui leur correspondent.

Rangeons maintenant ces nombres algébriques suivant leur hauteur N, en ordonnant les nombres qui correspondent à une même valeur de N suivant leur grandeur croissante. Nous aurons ainsi tous les nombres algébriques, chacun d'eux à une place déterminée. C'est ce qui a été fait dans le tableau précédent.

Notre proposition est donc démontrée.

3. Voici maintenant la proposition générale que nous avons en vue :

Si on considère une portion de l'axe des x, aussi petite que l'on veut, il s'y trouve une infinité de points qui n'appartiennent certainement pas à un ensemble énumérable donné.

En d'autres termes :

L'ensemble continu des valeurs numériques représentées par les points de l'axe des x contenus dans une portion de cet axe, si petite qu'elle soit, a une puissance plus grande que celle d'un ensemble énumérable donné.

Cela revient visiblement à affirmer l'existence des nombres transcendants; il suffit de prendre comme ensemble énumérable celui des nombres algébriques.

N	n	$\lvert a_0\rvert$	$\lvert a_1\rvert$	$\lvert a_2\rvert$	$\lvert a_3\rvert$	$\lvert a_4\rvert$	Equation	$\varphi(N)$	Racines
1	1	0					$x=0$	1	0
	2	0	0	0			—		
2	1	2	0				—	2	-1
		1	1				$x \pm 1 = 0$		$+1$
	2	1	0	0			—		
3	1	3	0				—	4	-2
		2	1				$2x \pm 1 = 0$		$-\frac{1}{2}$
		1	2				$x \pm 2 = 0$		$+\frac{1}{2}$
	2	2	0	0			—		+2
		1	1	0			—		
		1	0	1			—		
	3	1	0	0	0		—		
4	1	4	0				—	12	-3
		3	1				$3x \pm 1 = 0$		-1,61803
		2	2				—		-1,41421
		1	3				$x \pm 3 = 0$		-0,70711
	2	3	0	0			—		-0,61803
		2	1	0			—		-0,33333
		2	0	1			$2x^2 - 1 = 0$		+0,33333
		1	2	0			—		+0,61803
		1	1	1			$x^2 \pm x - 1 = 0$		+0,70711
		1	0	2			$x^2 - 2 = 0$		+1,41421
	3	2	0	0	0		—		+1,61803
		1	1	0	0		—		+3
		1	0	1	0		—		
		1	0	0	1		—		
	4	1	0	0	0	0	—		

Pour démontrer ce théorème, dressons le tableau des nombres algébriques, comme précédemment, et écrivons-y tous les nombres sous forme de nombres décimaux; aucun d'eux ne sera terminé par une suite indéfinie de 9; car l'égalité

$$1 = 0,99999\dots$$

montre qu'un tel nombre est un nombre décimal exact.

Si maintenant nous pouvions construire un nombre décimal qui ne soit pas terminé par une suite indéfinie de 9, et qui ne se trouve pas dans notre table, ce serait certainement un nombre transcendant. Un procédé très simple indiqué par M.G. Cantor, permet de trouver non seulement un tel nombre, mais une infinité, même si les limites entre lesquelles doit se trouver le nombre sont extrêmement rapprochées. Supposons, par exemple, que les cinq premières décimales du nombre soient données[1]. Le procédé de M. Cantor est alors le suivant.

On prend pour sixième décimale un nombre différent de 9 et de la 6ème décimale du *premier* nombre algébrique; pour 7ème décimale, un nombre différent de 9 et de la 7ème décimale du *second* nombre algébrique, etc. De cette manière, on obtient une fraction décimale indéfinie, qui ne sera pas terminée par une suite indéfinie de 9, et qui certainement n'est pas contenue dans notre table. La proposition est donc démontrée.

On voit aussi par là (si on veut bien nous permettre cette expression) qu'il y a beaucoup plus de nombres transcendants que de nombres algébriques. En effet, quand on détermine les décimales inconnues, on peut choisir, en évitant les 9, huit nombres différents; on forme ainsi des nombres transcendants au nombre de ∞^8, même quand ils doivent être compris entre des limites aussi rapprochées que l'on veut.

[1] C'est-à-dire que les limites entre lesquelles doit être compris le nombre diffèrent de $\frac{1}{10^5}$

Coup d'oeil historique sur les tentatives de calcul et de construction de π

PARTIE 2