Le problème de Délos et la trisection d'un angle quelconque

1. Appliquons les théorèmes du chapitre précédent au problème de Délos ou de la duplication du cube. Etant donné un cube dont l'arête est prise pour unité de longueur, il s'agit de trouver l'arête x d'un second cube dont le volume soit double de celui du premier. L'équation du problème est évidemment

$$x^3 - 2 = 0$$

Cette équation est irréductible; car si elle ne l'était pas, son premier membre pourrait se décomposer en facteurs rationnels, dont l'un au moins serait du premier degré en x. Il existerait donc une valeur rationnelle pour $\sqrt[3]{2}$, ce qui n'est pas.

D'autre part, le degré de cette équation n'est pas de la forme 2^h; donc ses racines ne peuvent s'exprimer uniquement à l'aide de racines carrées en nombre fini. Par suite il est impossible de les construire, c'est-à-dire de résoudre le problème proposé avec la règle et le compas.

2. Considérons maintenant l'équation plus générale

$$x^3 - \lambda = 0$$

λ désignant un paramètre, qui peut être une quantité complexe de la forme $a + bi$. Cette équation traduit analytiquement, ainsi que nous le verrons, aussi bien le problème de la multiplication du cube que celui de la trisection d'un angle quelconque.

Il s'agit de reconnaître si cette équation est irréductible c'est-à-dire si l'une de ses racines se présente sous la forme d'une fonction rationnelle de λ.

Remarquons en passant que l'irréductibilité d'une expression dépend en général des grandeurs qu'on suppose connues. Dans l'équation $x^3 - 2 = 0$, il s'agit de grandeurs numériques; on se demande si $\sqrt[3]{2}$ peut avoir une valeur numérique rationnelle. Pour l'équation $x^3 - \lambda = 0$, on se demande si une racine de cette équation peut être représentée par une fonction rationnelle de λ. Dans le premier cas, le *domaine de rationalité* comprend l'ensemble des nombres rationnels; dans le second cas, il est formé par les fonctions rationnelles d'un paramètre.

Ce paramètre étant supposé indépendant, on voit immédiatement qu'aucune expression de la forme $\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$, dans laquelle $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ sont des polynomes, ne peut vérifier notre équation. L'équation considérée est donc irréductible, et, comme son degré n'est pas de la forme 2^h, elle n'est pas résoluble à l'aide de radicaux carrés.

3. Restreignons maintenant la variabilité de λ. Posons (fig. 1)

$$\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

d'où

$$\sqrt[3]{\lambda} = \sqrt[3]{r}\,\sqrt[3]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$$

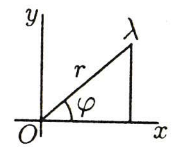

Fig. 1

Notre problème se décompose en deux : extraire la racine cubique d'un nombre réel et celle d'un nombre imaginaire de la forme $\cos\varphi + i\sin\varphi$, ces nombres étant d'ailleurs quelconques. Nous allons traiter séparément ces deux problèmes.

I. Les racines de l'équation

$$x^3 - r = 0$$

sont

$$\sqrt[3]{r}, \quad \varepsilon\sqrt[3]{r}, \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{r}$$

en représentant par ε et ε^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

En prenant pour domaine de rationalité l'ensemble des fonctions rationnelles de r on sait, d'après un raisonnement précédent (2), que l'équation

$$x^3 - r = 0$$

est irréductible. Par suite le problème de la multiplication du cube n'est pas susceptible, en général, d'une solution géométrique avec la règle et le compas.

II. Les racines de l'équation

$$x^3 - (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$$

sont, d'après la formule de Moivre

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3} \\ x_2 &= \cos\frac{2\pi+\varphi}{3} + i\sin\frac{2\pi+\varphi}{3} \\ x_3 &= \cos\frac{4\pi+\varphi}{3} + i\sin\frac{4\pi+\varphi}{3} \end{aligned}$$

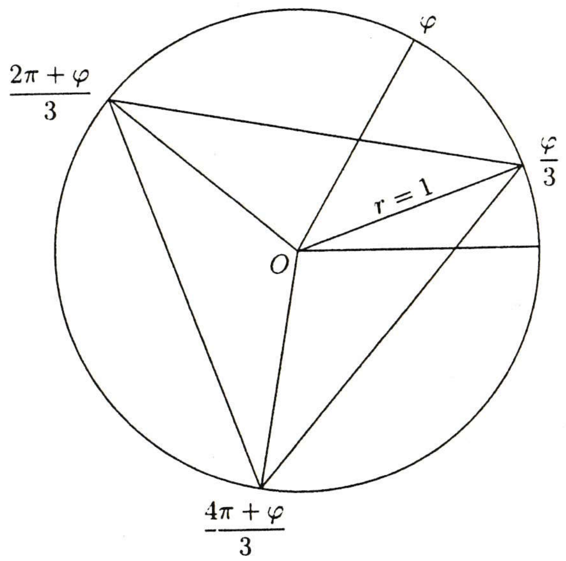

Fig.2

Ces racines se représentent géométriquement (fig. 2) par les sommets d'un triangle équilatéral, inscrit dans un cercle de rayon 1, ayant l'origine pour centre. La figure montre qu'à la racine x_1 correspond l'argument $\frac{\varphi}{3}$; l'équation considérée est donc l'expression analytique du problème de la trisection de l'angle.

Si l'équation

$$x^3 - (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$$

était réductible, l'une au moins de ses racines devrait pouvoir être représentée par une fonction rationnelle de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Par suite sa valeur ne changerait pas en remplaçant φ par $2\pi + \varphi$.

Mais, si on opère ce changement par une variation continue de l'angle φ, on voit que les racines x_1, x_2, x_3 se permutent circulairement.

Par conséquent nulle racine ne peut être représentée par une fonction rationnelle de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$. Donc l'équation proposée est irréductible, et, comme son degré n'est pas de la forme 2^h, elle n'est pas résoluble à l'aide de racines carrées en nombre fini. *La trisection de l'angle ne peut donc se faire avec la règle et le compas.*

Cette démonstration, de même que le théorème général, n'est valable que si φ est un angle arbitraire; pour certaines valeurs particulières de φ la construction peut se trouver possible.