Irrationalité et transcendance :

Etat des lieux avant Hermite

A peine l'irrationalité est-elle découverte - avec horreur - par les Pythago riciens, au V^{eme}siècle avant J.C., que s'élève la question du statut de π, parce qu'elle est liée au problème de la quadrature du cercle, dont la première mention est faite par ARISTOPHANE (Les Oiseaux, IV^{eme} siècle avant J.C.).

π est donc cette place forte assiégée depuis l'antiquité grecque qui ne tombera qu'à l'aube du XX^{eme} siècle (LINDEMANN 1882), en fonction de qui un assaillant nombreux échafaude ses ruses et construit ses machines. L'Ulysse de cette aventure est Johann Heinrich LAMBERT (1728-1777), qui dans son mémoire *Sur Quelques Propriétés Remarquables Des Quantités Transcendantes Circulaires et Logarithmiques* de 1761, non seulement remporte le premier succès ($\pi \notin \mathbb{Q}$), mais surtout introduit le "cheval de Troie" : le développement en fraction continuée de $\tan x$ (ou $\operatorname{th} x$). Pour l'avoir entrevu et exploité ($e \notin \mathbb{Q}$,1737) Leonhard EULER (1707-1783) est un indiscutable prédecesseur, tandis que Charles HERMITE (1822-1901) se considère, de son propre aveu, comme un successeur(1) de LAMBERT quand il parvient à la transcendance de e (1882).

Quant à e, on le voit apparaître, par trois fois au moins, comme le laboratoire des méthodes. En atteste la chronologie :

	e	π
Irrationnalite	1737 EULER	1761 LAMBERT
Transcendance	1872 HERMITE	1882 LINDEMANN
Calcul(ENIAC) (2000 decimales)	4/7/49 en $11H$	11/7/49 en $70H$

C'est que dans chacun des cas, c'est toujours "un peu plus compliqué pour π". Un écart qu'exagère toutefois HERMITE lui-même(2), et qui se rétrecit de

---

(1) *Tout ce que je puis faire , c'est de refaire ce qu'a déjà fait LAMBERT, seulement d'une autre manière* ... lettre à BORCHARDT, 1873

(2) *Je ne hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez m'en, mon cher ami, il ne laissera pas de leur en coûter*

plus en plus au cours de l'histoire !

Sur le plan des méthodes, c'est le règne sans partage des fractions continuées, outil parfaitement naturel avec EULER (I), logiquement adopté et adapté par ses successeurs (II). Pour e comme pour π, on a volontairement donné, après les éléments de la "première historique", ceux d'une preuve plus moderne et plus rapide (c'est ainsi que les théorèmes vivent...). Il est significatif que dans les deux cas, celle-ci procède -fût-ce de manière sous-jacente - d'un principe d'approximation de Padé.

I. e comme EULER

De Fractionibus Dissertatio (1737) contient séparément - ils ne seront jamais rapprochés sous la forme : "corollaire : e est irrationnel"- les deux éléments clés: le critère d'irrationalité d'une fraction continuée et le développement de e.

I.1 Le critère d'irrationalité

Le développement en fraction continuée régulière (c.a.d. les dénominateurs partiels sont entiers et les numérateurs partiels valent 1) du réel ω s'obtient suivant l'algorithme :

$$\omega = [\omega] + r_1 = a_1 + r_1$$

tant que $r_n \neq 0$ **faire**

$$\frac{1}{r_n} = \left[\frac{1}{r_n}\right] + r_{n+1} = a_{n+1} + r_{n+1}$$

la notation [] désignant, suivant l'usage, la partie entière.

Lemme IR1. $(\forall n \in \mathbb{N}, r_n \neq 0)$ *implique* $\omega \notin \mathbb{Q}$

On prouve la contraposée : $\omega = p/q \Rightarrow \exists N,\ r_N = 0$.

En effet : $p = qd_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < q \quad \omega = d_1 + \frac{1}{q/r_1}$.

Si $r_1 \neq 0$: $q = r_1 d_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1 \quad \omega = d_1 + \dfrac{1}{d_2 + \frac{1}{r_1/r_2}}$, et, tant que les restes successifs sont non nuls :

$$r_{k-2} = r_{k-1} d_{k-2} + r_k, \quad 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

La suite d'entiers ainsi construite est strictement décroissante, donc parvient en zéro en un nombre fini d'itérations. ■

---

quelques efforts. Même lettre, phrase précedente !

Bref, il s'agit, et EULER ne manque pas de le remarquer, de l'algorithme d'EUCLIDE ! De plus la réciproque est évidente.

I.2. Développements liés à e

I.2.1. Des résultats

La grande force du critère précédent est de fonctionner "à l'oeil nu" ! Qu'on obtienne, avec EULER dans la suite de sa *Dissertatio* le

Théorème E1. $e = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{1+}\frac{1}{2n+}\frac{1}{1+}\cdots$

et l'irrationalité est acquise, bien plus naturellement qu'avec la méthode réputée élementaire de FOURIER (1815), issue de l'encadrement :

$$S_n < e < S_n + \frac{1}{n.n!} \quad S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

mais qui n'est peut-être pas postérieure par hasard.

On peut encore utiliser aux mêmes fins l'une des formules suivantes, estimées plus sympathiques par l'auteur, probablement en raison de leur belle régularité : les dénominateurs partiels y sont en progression arithmétique !

Théorème E2. $\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\frac{1}{22+}\cdots\frac{1}{4n+2+}\cdots$

Théorème E3. $\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\frac{1}{22+}\cdots\frac{1}{4n+2+}\cdots$

Théorème E4. $\frac{e^2-1}{2} = 3 + \frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\frac{1}{9+}\frac{1}{11+}\frac{1}{13+}\cdots\frac{1}{2n+3+}\cdots$

Par cette dernière formule, on établit le résultat plus fort : $e^2 \notin \mathbb{Q}$.

I.2.2. "issus de la seule observation"(3)

EULER n'éprouve aucune honte à être un mathématicien expérimentateur ; c'est ainsi qu'il écrit dans l'*Introduction* :

$$\frac{e-1}{2} = 0,859\ 140\ 914\ 229\ 5 = \frac{859\ 140\ 914\ 229\ 5}{1000\ 000\ 000\ 000\ 0}$$

et, appliquant l'algorithme d'EUCLIDE, obtient les quotients partiels : 1, 6, 10, 14, 18, 22, "d'où s'ensuit evidemment" (sic) le résultat E3.

(3) Les mots de ce titre et du suivant, sont ceux-là mêmes qu'emploie EULER dans sa célèbre *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* (1748)

I.2.3. "dont la raison peut se donner par le calcul infinitésimal."

Si l'*Introduction* n'en dit pas plus, cela se trouve précisé dans la *Dissertatio.* L'idée est d'intégrer de deux manières l'équation différentielle :

$$a\frac{dq}{dp}+q^2=1 \tag{E}$$

D'une part, il obtient par séparation des variables la solution infinie en zéro (4)

$$q(p)=\frac{e^{2p/a}+1}{e^{2p/a}-1}$$

D'autre part, il exploite le fait qu'une homographie transforme une équation de RICATTI en une autre du même type ; en itérant n fois le procédé, apparaît un développement coïncidant de plus en plus loin avec celui du candidat présumé : posant

$$\begin{aligned} q &= \frac{a}{p}+\frac{1}{q_1},\ q_1 \text{ est solution de } \ (E_1) \quad aq_1'+q_1^2=1+(2a)\frac{q_1}{p} \\ q_1 &= \frac{3a}{p}+\frac{1}{q_2},\ q_2 \text{ est solution de } \ (E_2) \quad aq_2'+q_2^2=1+2(2a)\frac{q_2}{p}. \end{aligned}$$

Une récurrence sans problème amène à :

$$q_{n-1}=(2n-1)\frac{a}{p}+\frac{1}{q_n},\ q_n \text{ est solution de } (E_n) \quad aq_n'+q_n^2=1+n(2a)\frac{q_n}{p}.$$

Soit, en enchaînant :

$$q=\frac{a}{p}+\frac{1}{3a/p+}\,\frac{1}{5a/p+}\,\frac{1}{7a/p+}\,\cdots\,\frac{1}{(2n-1)a/p+}\,\frac{1}{q_n}$$

EULER pose simultanément $q_n=x^{\frac{2n}{2n+1}}y, p=(2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}$

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases} q=\dfrac{a}{p}+\dfrac{1}{3a/p+}\,\dfrac{1}{5a/p+}\,\dfrac{1}{7a/p+}\,\cdots\,\dfrac{1}{(2n-1)a/p+}\,\dfrac{1}{q_n} & (*) \\ ay'+y^2=x^{\frac{-4n}{2n+1}} & (\mathcal{E}_n) \end{cases}$$

(4) $q(p)=\coth(p/a)$, à ceci près qu'il ne peut employer un notation qu'inventera ultérieurement LAMBERT ! C'est donc bien le développement de th qu'il va obtenir.

ce qui lui semble, apparamment, plus rassurant (5) pour remplacer le dernier terme par des points de suspension ! en comparant :

$$\frac{e^{2p/a}+1}{e^{2p/a}-1}=\frac{a}{p}+\frac{1}{3a/p+}\frac{1}{5a/p+}\frac{1}{7a/p+}\cdots\frac{1}{(2n-1)a/p+}\cdots.$$

(E_4) s'en déduit avec $a/p=1$, (E_3) avec $a/p=2$, enfin (E_2) à partir de

$$\frac{e+1}{e-1}=1+\frac{2}{e-1}.$$

C'est en tout cas la seule fois dans son travail qu'EULER opère sur une *fonction* et non sur un nombre, et la seule fois également où il *développe* : dans tout ce qui précède, il n'a fait qu'assigner (c.a.d. trouver la valeur limite) des fractions dont il se donne arbitrairement les dénominateurs partiels selon des règles simples (tous égaux, ou de deux en deux, etc).

I.3. Un accès rapide à une fraction d'EULER

Outre la "voie LAMBERT", sur laquelle on reviendra en II, voici en étapes succintes, celle proposée aux candidats du concours général 84 ; elle s'appuie sur l'intégrale employée par HERMITE pour expliciter les approximants de PADE de l'exponentielle. Soit

$$\varphi_n(t)=\frac{t^n(1-t)^n}{n!},\quad I_n=\int_0^1\varphi_n(t)e^{-t}dt.$$

i) $\varphi''_{n+1}(t)=(4n+2)\varphi_n(t)+\varphi_{n-1}(t)$, en déduire $I_{n+1}=(4n+2)I_n+I_{n-1}$.

ii) Les suites (X_n) telles que $X_{n+1}=(4n+2)X_n+X_{n-1}$ forment un espace vectoriel de dimension deux, de base $(a_n),(b_n)$, ces suites étant définies par $a_0=1, a_1=0,\ b_0=0, b_1=1$. Alors $\frac{a_n}{b_n}$ est la nième réduite de $\frac{1}{2+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\cdots\frac{1}{4n+2+}\cdots$ et

$$I_n=I_0b_n\left(\frac{I_1}{I_0}+\frac{a_n}{b_n}\right).$$

(5) est-ce parce que $\mathcal{E}_n$ ressemble de plus en plus à (E) quand n croît, et qu'ainsi le dernier quotient de (*) paraît avoir de moins en moins d'influence sur le $(2n-1)a/p$ qu'il corrige ? EULER est on ne peut plus mystérieux sur cela, se contentant de dire sans autre détail qu'il a réussi à former le développement en ramenant $(\mathcal{E}_n)$ à (E) par(*) !

iii) Prouver directement que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{I_1}{I_0} = \frac{3-e}{e-1} = -1 + \frac{2}{e-1}$, puis (E_3).

II. π : maison LAMBERT et successeurs

EULER a, bien sûr, joué aux devinettes avec π, en vain puisque le dévelop pement en f.c. régulière est encore inconnu à ce jour. Toute l'astuce de LAMBERT est de renverser le point de vue, en couplant un développement simple

$$\tan x = \frac{x}{1+}\,\frac{-x^2}{3}\;+\;\frac{-x^2}{5}\;+\;\frac{-x^2}{7}\;+\;\frac{-x^2}{9}\;+\;\cdots\frac{-x^2}{2k+1+}\;\cdots$$

à un raisonnement par l'absurde : si $\pi/4 = x \in \mathbb{Q}$, alors $1 = \tan x \notin \mathbb{Q}$. Encore faut-il pour cela modifier le critère d'irrationalité, qui doit désormais concerner un développement en f.c. généralisée.

II.1. Le critére d'irrationalité

Lemme IR.2 *Soit* $x = \dfrac{a_1}{b_1+}\,\dfrac{a_2}{b_2+}\,\dfrac{a_3}{b_3+}\,\cdots\dfrac{a_k}{b_k+}\,\cdots$ *,* $a_k \in \mathbb{Z}$*,* $b_k \in \mathbb{Z}$*. On suppose que* $\forall k \in \mathbb{N}, 1 + |a_k| < |b_k|$*, alors i)* x *est convergente, ii)* $|x| < 1$*, iii)* $x \notin \mathbb{Q}$*.*

i) est le rappel, pour mémoire, du théorème de PRINGSHEIM ; il n'est pas utile à la suite (6).

ii) $$\frac{|a_k|}{|b_k|} < 1 \Rightarrow \left|b_{k-1} + \frac{a_k}{b_k}\right| \geq |b_{k-1} - 1$$
$$\geq |a_{k-1}|$$

donc $$\left|\frac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \dfrac{a_k}{b_k}}\right| \leq 1.$$

En remontant ainsi de proche en proche, le kième convergent est de module inférieur à 1 ; à la limite $|x| \leq 1$.

Ecrivant enfin $x = \dfrac{a_1}{b_1 + p_1}$, $|p_1| \leq 1$ par ce qui précède, on a $|x| < 1$.

iii) Supposons alors $x = B/A$, avec A et B entiers. $p_1 = \dfrac{Aa_1 - Bb_1}{B} = \dfrac{B_1}{B}$ et par ii) $|p_1| < 1$ implique que $0 \leq |B_1| < |B|$.

---

(6) LEGENDRE, dont on suit ici la rédaction, suppose seulement $|a_k| < |b_k|$, et se voit contraint de discuter plus longuement le cas $|x| = 1$, en lecteur scrupuleux d'un LAMBERT qui l'avait oublié.

En réitérant, $p_1 = \dfrac{a_2}{b_2 + p_2}$,etc, on construit une suite d'entiers naturels, infinie,et strictement décroissante, c'est absurde. ■

Corollaire : *Soit* $x = \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2 +} \dfrac{a_3}{b_3 +} \cdots \dfrac{a_k}{b_k +} \cdots$, $a_k \in \mathbb{Z}, b_k \in \mathbb{Z}$, *si* $\exists \kappa,\ k \leq \kappa \rightarrow 1 + |a_k| < |b_k|$, *alors* $x \notin \mathbb{Q}$

$$x = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots \frac{a_k}{b_k + y +} \cdots, \quad y \notin \mathbb{Q} \text{ par le lemme.}$$ ■

Ce critère ne s'applique directement à aucun développement connu de π, sinon LAMBERT aurait eu moins de peine ! Dommage pour la première apparition attestée des fractions continuées en Europe, le célèbre développement de BROUNCKER (1655, cité par WALLIS)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 +} \frac{1^2}{2 +} \frac{3^2}{2 +} \frac{5^2}{2 +} \frac{7^2}{2 +} \cdots$$

Voici comment l'appliquer à (L_1):

$$\left.\begin{aligned} \tan \frac{m}{n} &= \frac{m/n}{1 - p_1} = \frac{m}{n - np_1} \\ p_1 &= \frac{m^2/n^2}{3 - p_2} = \frac{m^2}{3n^2 - n^2 p_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n^2 - n^2 p_2}}.$$

En itérant

$$\tan \frac{m}{n} = \frac{m}{n +} \frac{-m^2}{3n +} \frac{-m^2}{5n +} \frac{-m^2}{7n +} \cdots \frac{-m^2}{9n +} \cdots \frac{-m^2}{(2k+1)n +} \cdots$$

m et n étant des entiers fixés, on conclut grâce au corollaire. ■

Théorème de LAMBERT

$$\begin{cases} r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \tan r \notin \mathbb{Q} \\ \tan r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

De $\tan \pi = 0$, LEGENDRE déduira : $3 = \dfrac{\pi^2}{5 +} \dfrac{-\pi^2}{7 +} \dfrac{-\pi^2}{9 +} \cdots$ et de façon similaire $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ (Eléments de Géométrie, 1795)

II.2. A la recherche du développement de tan

Théorème L1 : *Pour tout* x *différent de* $\pi/2 + p\pi$,

$$\tan x = \frac{x}{1 +} \frac{-x^2}{3 +} \frac{-x^2}{5 +} \cdots \frac{-x^2}{2k + 1 +} \cdots$$

II.2.1. Une découverte laborieuse

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x \frac{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = x \Bigg/ \frac{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}$$

L'idée est alors de "faire sortir" le premier terme comme dans un développement selon les puissances croissantes, et de calculer l'exacte compensation à opérer. Ainsi

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{x}{1 + A_1(x)} \\
A_1(x) &= \frac{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!}\right)}{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}} \\
&= -x^2 \frac{\sum_1^\infty (-1)^n \frac{2n x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}} \\
&= -x^2 \Bigg/ \frac{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum_0^\infty (-1)^p \frac{(2p+2)}{(2p+3)!} x^{2p}}
\end{aligned}$$

On est alors paré à réitérer, c'est à dire écrire

$$A_1(x) = \frac{-x^2}{3 + A_2(x)},$$

$3 = 1/(1/3)$ est le quotient des termes constants des séries. On contrôle alors par récurrence : $A_{k-1}(x) = \dfrac{-x^2}{(2k-1) + A_k(x)}$, avec :

$$A_k(x) = -x^2 \Bigg/ \frac{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \frac{(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2k)}{(2n+2k+1)!}}{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \frac{(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2k-2)}{(2n+2k-1)!}}$$

II.2.2. Une synthèse habile

EULER s'en serait certainement tenu là, si l'on compare à I.2.3. Il est remarquable que LAMBERT soit conscient qu'il n'y a là qu'une présomption, pas encore une preuve. Le préambule de son Mémoire annonce la couleur : le terrain sensible, passionnel parfois, de la quadrature du cercle exige une rigueur irréprochable.

Il cherche donc à calculer le nième convergent P_n/Q_n de la fraction continuée. Bien sûr P_n et Q_n vérifient la récurrence :

$$u_n = (2n-1)u_{n-1} - x^2 u_{n-2}$$

mais il lui faut la forme explicite. La magistrale habileté de LAMBERT est de rapprocher P_n du développement en série de sin, et Q_n de celui de cos, en "forçant" l'apparition des $x^k/k!$. Par exemple :

$$P_4 = 3.5.7x - 2.5x^3 \ = 3.5.7\big(x - \frac{x^3}{3!}\frac{4}{7}\big)$$

$$Q_4 = 3.5.7 - 3.15x^2 + x^4 \ = 3.5.7\big(1 - \frac{x^2}{2!}\frac{6}{7} + \frac{x^4}{4!}\frac{2.4}{5.7}\big)$$

ce qui lui permet d'induire, puis de vérifier (!) par récurrence :

$$p_n = \frac{1}{1.3.\cdots(2n-1)}P_n = \sum_1^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\alpha_{k,n}$$

$$q_n = \frac{1}{1.3.\cdots(2n-1)}Q_n = \sum_0^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\beta_{k,n}$$

$$\alpha_{k,n} = \frac{(2n-2k)(2n-2k-2)\cdots(2n-4k+4)}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+3)}, \ \beta_{k,n} = \frac{(2n-4k+2)}{(2n-2k+1)}\alpha_{k,n}$$

$\alpha_{k,n}, \beta_{k,n}$ sont bien sûr nuls à partir d'un certain rang : k_n, de plus

$$0 \le \alpha_{k,n} \le 1, \quad 0 \le \beta_{k,n} \le 1 \qquad (*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{k,n} = 1, \quad lim_{n\to\infty}\beta_{k,n} = 1 \qquad (**)$$

puisque cela fixe le nombre de termes des produits.

Reste à prouver $\lim_{n\to\infty} p_n = \sin x$, en faisant intervenir (*) et (**) grâce à une scission judicieuse (7). On note :

$$S_L(x) = \sum_1^{L}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad p_{n,L}(x) = \sum_1^{L}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\alpha_{k,n}$$

$$\sin x - p_n(x) = S_L(x) - p_{n,L}(x) + \sum_{L+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(1-\alpha_{k,n}).$$

---

(7) C'est le seul point sur lequel LAMBERT se montre imprécis ; la rédaction complémentaire est dûe à LEBESGUE.

Le reste est d'abord majoré par $\sum_{L+1}^{\infty} \frac{|x|^{2k-1}}{(2k-1)!}$ avec (*) ; fixant alors L tel qu'il soit inférieur à ε, $S_L(x) - p_{n,L}(x)$ est ensuite rendue arbitrairement petit grâce à (**).

Finallement P_n/Q_n converge vers $\tan x$ partout où elle est définie (8) ■

.

II.3. De LEGENDRE à HERMITE via BESSEL

II.3.1. LEGENDRE : simplification ou régression ?

Reprenant et complétant (cf II.1) le travail de LAMBERT, il part d'une série "parachutée" sans un traitre mot qui éclaire son inspiration :

$$\varphi_\nu(a) = \sum_0^{\infty} \frac{a^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k-1)}$$

très proche de $J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k-1)(\nu+k)}$

d'autant qu'il ne manquera pas de faire, un peu plus loin, $a = -x^2/4$. Le développement de tan est "retrouvé" à partir de la relation de récurrence à trois termes entre les φ_ν. Travailler avec les J_ν de BESSEL n'altère pas l'esprit de la preuve et possède l'avantage de s'appuyer sur des relations classiques (au prix d'un petit anachronisme : BESSEL introduisit ses fonctions en1817). Rappelons (9)

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \qquad (B_1)$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \sin x, \;\; J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \cos x \qquad (B_2)$$

Posant $u_\nu(x) = x\frac{J_{\nu-1}(x)}{J_\nu(x)}$, on tire de (B_1) : $u_\nu(x) = 2\nu - \frac{x^2}{u_{\nu+1}(x)}$ $\quad(*)$,

puis de (B_2) $u_{1/2}(x) = x/\tan x$.

---

(8) La convergence est d'ailleurs uniforme sur tout segment où tan reste bornée, comme le souligne LEBESGUE dans son analyse.

(9) formules immédiates à partir des séries ; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ pour (B_2), mais cette valeur est inutile dans l'étude du quotient qui suit.

Reitérant (*)

$$u_{1/2}(x) = 1 - \frac{x^2}{u_{3/2}}(x) = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{u_{5/2}(x)}}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3} \, \frac{}{-} \, \frac{x^2}{5} \, \frac{}{-} \, \frac{x^2}{7} \, \frac{}{-} \cdots \frac{x^2}{u_{p+1/2}(x)}. \qquad (**)$$

Très eulérien, LEGENDRE conclut, ... mais qu'en aurait pensé LAMBERT ?

II.3.2. Déja Henri PADE perçait sous Charles HERMITE

Complétée par une synthèse rigoureuse, l'idée de LEGENDRE offre l'accès le moins pénible au développement de $\tan x$. Le point de départ choisi par plusieurs problèmes :

$$xy'' - 2ny' + xy = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

à priori énigmatique, sera décrypté par la mise en évidence du lien entre :

- les réduites de la fraction de LAMBERT ;

- l'expression, à l'aide de fonctions élémentaires, des fonctions de BESSEL d'indices demi-entier $J_{n+1/2}(x)$.

Ce lien se laisse d'ailleurs deviner, qualitativement au moins, dans la formule finale de II.3.1 :(**).

* *Quelques rappels :* dans ce qui suit, $\nu > 0, \nu \notin N$

i) J_ν est solution de $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0 \qquad (\mathcal{B}_\nu)$

ii) les seules solutions bornées en 0 sont les multiples de J_ν.

iii)$(\mathcal{B}_\nu) \Leftrightarrow \begin{cases} y = z/x^\nu \\ z \text{ solution de } xz'' + (1-2\nu)z' + xz = 0 \end{cases}$

Donc $J_{n+1/2}(x) = \frac{1}{x^{n+1/2}} A_n(x); \begin{cases} A_n(0) = 0 \\ A_n \text{solution de } xz'' - 2nz' + xz = 0 \quad (\mathcal{E}_n) \end{cases}$

et la première condition est nécessaire pour que $J_{n+1/2}$ soit bornée en 0.

* *Application à la forme explicite de* $J_{n+1/2}$ *:*

iv)$\begin{cases} \psi_n(0) = 0 \\ \psi_n \text{ solution de } (\mathcal{E}_n) \end{cases} \Rightarrow \psi_{n+1}(x) = \int_0^x t\psi_n(t)dt \text{ vérifie } \begin{cases} \psi_{n+1}(0) = 0 \\ (\mathcal{E}_{n+1}) \end{cases}$

v) $\psi_n(x) = (2n-1)\psi_{n-1}(x) - x^2\psi_{n-2}(x)$

vi) Soit $A_0(x) = \sin x$, alors $A_n(x) = Q_n(x)\sin x - P_n(x)\cos x$, avec

$$Q_n(x) = (2n-1)Q_{n-1}(x) - x^2 Q_{n-2}(x), \quad Q_0(x) = 1,\ Q_1(x) = 0$$
$$P_n(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) - x^2 P_{n-2}(x), \quad P_0(x) = 0,\ P_1(x) = x.1$$

donc on conclut : $J_{n+1/2}(x) = \dfrac{Q_n(x)\sin x - P_n(x)\cos x}{x^{n+1/2}}$

* *Lien avec l'approximation de tangente :*

• $C_n = P_n/Q_n$ est le nième convergent de la fraction de LAMBERT. On reconnaît en effet en vi) les récurrences correspondantes.

• C_n est un approximant de PADE $[n/n+1]$ ou $[n+1/n]$ de $\tan x$. On le voit en comparant $J_{n+1/2}(x)$ avec la série entière :

$$J_{n+1/2}(x) = \frac{Q_n(x)\sin x - P_n(x)\cos x}{x^{n+1/2}} = x^{n+1/2}\sum_0^\infty u_k x^k$$

Quoique présentée dans un ordre différent, c'est la démarche suivie par HERMITE (lettre à GORDAN 1873) : *"Chercher les polynômes entiers en x tels que $U\sin x - V\cos x$ commence par la plus haute puissance de la variable"*. Il part a priori de $A_0(x) = \sin x, A_{n+1}(x) = \int_0^x tA_n(t)dt$, en déduit la récurrence des A_n, et conclut: *"De là se tire la fraction continue de LAMBERT, et l'équation différentielle des transcendantes de BESSEL. Il suffit en effet d'observer :*

$$A_{n-1}(x) = \frac{1}{x}A_n'(x),\ A_{n-2}(x) = \frac{1}{x^2}\big(A_n''(x) - \frac{1}{x}A_n'(x)\big)$$

pour passer de la récurrence à cette équation si connue :

$$A_n''(x) - \frac{2n}{x}A_n'(x) + A_n(x) = 0.$$

* *Preuve de la convergence :* (10)

vii) $B_n(x) = Q_n(x)\cos x + P_n(x)\sin x$ vérifie $B_{n+1}'(x) = xB_n(x)$ et $(\mathcal{E}_n)$.

---

(10) elle ne figure (!) pas dans ce texte de HERMITE, car la fraction continuée n'étant pas une fin en soi, HERMITE ne s'y attarde pas, préférant dériver la preuve d'irrationalité directement de l'approximation de PADE obtenue. Cette méthode directe est présentée à l'appendice A.

viii) $\forall x \in [0, \pi/2],\ 0 \leq Q_n(0) \leq B_n(x)$.

ix) $\forall x \in [0, \pi/2],\ 0 \leq A_n(x) \leq \dfrac{x^{2n+1}}{(n+1)!}$. (à tirer de iv)

x) $C_n(x)$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers $\tan x$, pour $a < \pi/2$. En effet :

$$\begin{aligned} 0 \leq \tan x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} &\leq \frac{A_n(x)}{\cos x} \frac{1}{Q_n(x)} \\ &\leq \frac{A_n(x)}{\cos x} \frac{1}{A_n(x) \sin x + B_n(x) \cos x} \\ &\leq \frac{A_n(x)}{B_n(x) \cos^2 x} \leq \frac{A_n(x)}{Q_n(0) \cos^2 x} \end{aligned}$$

et l'on achève sans peine avec ix).

II.4. Le retour de Johann LAMBERT : irrationalité de e^m

LAMBERT n'avait pas hésité à changer x en ix dans (L_1), retrouvant ainsi, mais bien plus solidement, le développement d'EULER (11) :

Théorème L_2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th} x = \dfrac{x}{1+} \dfrac{x^2}{3+} \dfrac{x^2}{5+} \dfrac{x^2}{7+} \cdots \dfrac{x^2}{2k+1+} \cdots$

Corollaire (LAMBERT) : $r \in \mathbb{Q} \begin{cases} \Rightarrow \operatorname{th} r \notin \mathbb{Q} \\ \Rightarrow \exp r \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Il montre alors le chemin à celui qui revendiquera sa filiation : *"Ceci nous fait connaître à quel point l'irrationalité du nombre e est* **transcendante** *en ce qu'aucune de ses dignités, ni de ses racines, ne saurait être rationnelle."* (12)

Respectueux de l'héritage, HERMITE ne cessera de le cultiver en l'illuminant par ses points de vue variés (que l'on pourra découvrir dans l'Appendice). Au point qu'on lui attribue parfois ce théorème, alors que ses écrits, on l'a vu, ne cessent de rendre à LAMBERT ce qui est à LAMBERT.

III. LIOUVILLE : de l'irrationnel au transcendant

III.0. Position du problème

On pourrait dire dans un langage moderne, que c'est en étudiant la vitesse de convergence des réduites d'une fraction continue que Joseph LIOUVILLE

(11) ou bien est-ce, a contrario, ce qui lui suggère celui de tan?
(12) souligné par nous. *dignités* signifie *puissances.*

(1809-1882) découvre en 1844, le moyen de fabriquer des nombres transcendants (13) . C'est, certes, une première historique, mais que le résultat d'HERMITE n'enverra pas au musée : sa méthode même soulève des questions passionnantes pour les générations suivantes, notamment celles des mesures d'irrationalité, plus que jamais sous le feu de l'actualité !

On sait, pour les réduites d'une fraction continue régulière :

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leq \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n^2} \qquad [0]$$

LIOUVILLE se demande si l'on peut avoir une convergence plus rapide :

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leq \frac{K(\alpha)}{Q_n^r} \qquad r > 2 \qquad [1]$$

$$\text{ou même} \quad \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leq \frac{K(\alpha)}{Q_n^n} \qquad [2]$$

ou, si, au contraire existe une *limitation* inhérente à α :

$$\frac{C(\alpha)}{Q_n^d} \leq \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \qquad d > 1 \qquad [3]$$

Si l'on a [1], α est dit *rationnellement approchable à l'ordre r.*

Si l'on a [3], $1/q^d$ est appelée *mesure d'irrationalité de* α. On demande en outre que ce $C(\alpha)$ soit **explicite**.

Si l'on a [2], α méritera une appellation contrôlée : *nombre de LIOUVILLE* !

Une mesure d'irrationalité est donc une "butée" qui empêche toute approximation rationnelle à un ordre $r > d$. C'est, semble-t-il, la connaissance d'une inégalité du type [3] avec $d = 2$ pour les irrationnels quadratiques (14) qui a poussé LIOUVILLE à l'étude du cas où α est racine d'une équation algébrique de degré quelconque.

III.1. Une méthode d'irrationalité

Philosophie : un rationnel est **très mal** *approché par ses congénères !*

Théorème A1 : *Soit* $\alpha \in \mathbb{Q}, \exists C(\alpha) > 0, \forall p, q \in \mathbb{Z} * \mathbb{N}^* |\alpha - p/q| \geq \frac{C(\alpha)}{q}$.

Si $\alpha = a/b$, $(a, b) \in \mathbb{Z} * \mathbb{N}^*$, alors : $\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|ap - bq|}{q} \geq \frac{1}{bq}$; $C(\alpha) = 1/b$. ■

(13) *"qui ne soient pas compris dans les irrationnels algébriques"* dit-il !
(14) Elle résulte du théorème de LAGRANGE sur la périodicité du développement.

Corollaire : *S'il existe une suite (p_n, q_n) d'éléments de $\mathbb{Z} * \mathbb{N}^*$ tels que*

$\lim_{n\to\infty} q_n - \alpha p_n = 0$, *alors* $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow \left|\alpha - \frac{P_n}{q_n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{q_n}$$
$$\frac{C(\alpha)}{q_n} \leq \left|\alpha - \frac{P_n}{q_n}\right|,$$

d'où une contradiction. ■

Exemple 1 (LIOUVILLE) : $\alpha = \sum_0^\infty \frac{1}{2^{k^2}} \notin \mathbb{Q}$

$\frac{p_n}{q_n} = \sum_0^n \frac{1}{2^{k^2}}, q_n = 2^{n^2}$ par réduction au même dénominateur ; puis par majoration du reste par celui d'une série géométrique :

$$0 \leq \alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{2^{k^2}} \leq \frac{2}{2^{(n+1)^2}} = \frac{1}{q_n 2^{2n}},$$ d'où le résultat. ■

Exemple 2 (APERY 1978) : $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$

Le principe en était la construction, d'ailleurs par fractions continues généralisées, d'une suite telle que : $\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{1.08}}$

III.2. Une méthode de transcendance

Philosophie : un algébrique est **assez mal** *approché par les rationnels !*

Plus précisément, on montre qu'il n'est approchable à aucun ordre supérieur à son degré : c'est la célèbre *inégalité de LIOUVILLE*, qui généralise A1.

Théorème A2 (inégalité de LIOUVILLE) : *Soit α algébrique de degré d* $\exists C(\alpha) > 0, \forall p, q \in \mathbb{Z} * \mathbb{N}^*$ $|\alpha - p/q| \geq \frac{C(\alpha)}{q^d}$.

Supposons que α est racine de l'équation à coefficients a_k entiers, de degré d le plus petit possible (polynôme minimal) :

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

On a, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|f(\alpha) - f(\frac{p}{q})\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| M_\alpha,\ M_\alpha = \sup_{x\in[\alpha-1,\alpha+1]} |f'(x)|$$

tout au moins lorsque $|\alpha - p/q| \leq 1$. Alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M_\alpha}|f(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{M_\alpha}\frac{1}{q^d}$.

car $q^d f(p/q)$ est un entier : q^d chasse les dénominateurs.

Cet entier est non nul, sinon d n'est pas minimal, puisqu'on peut diviser f par $x - p/q$.

Il est donc supérieur à 1, et c'est le fait arithmétique fondamental ! Et dans tous les cas, pour finir :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \inf(1, \frac{1}{M_\alpha})\frac{1}{q^d}.$$

■

Corollaire et définition :

i) α est dit de LIOUVILLE s'il existe une suite (p_n, q_n)d'éléments de $\mathbb{Z} * \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^n}.$$

ii)Si α est de LIOUVILLE, alors il est transcendant.

III.3. Les premiers transcendants explicites :

C'est ici seulement que LIOUVILLE recourt aux fractions continuées. Soit, pour une suite (a_k) d'entiers naturels

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots\frac{1}{a_n}$$
$$x = \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots\frac{1}{a_n +}\frac{1}{z}$$

C_n est la nième réduite de x, et z est la "queue" de la f.c.. On sait que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}P_n + P_{n-1}}{a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}$, de même donc $x = \frac{zP_n + P_{n-1}}{zQ_n + Q_{n-1}}$ ce qui permet d'obtenir par différence de x et de sa nième réduite, en se rappelant que $|P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n| = 1$

$$\left|x - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_n(zQ_n + Q_{n-1})}$$

d'où $$\left|x - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leq \frac{1}{Q_n^2 z}$$

or $$\frac{C(x)}{Q_n^d} \leq \left|x - \frac{P_n}{Q_n}\right|$$

si x est algébrique de degré d. En comparant, on tire pour x algébrique de degré d :

$$a_{n+1} \leq z \leq \frac{1}{C(x)} Q_n^{d-2} \qquad \mathcal{I}$$

Il suffit donc que les (a_n) "croissent très rapidement" pour que l'inégalité $(\mathcal{I})$ ne soit respectée pour aucun d ; dans un premier temps, LIOUVILLE se contente d'ailleurs de signaler que l'on peut arbitrairement poser :

$$a_{n+1} = Q_n^n$$

puisque le calcul de Q_n ne fait intervenir que les a_k pour $k \leq n$. ■

Plus tard, il donnera l'exemple explicite suivant :

Proposition : $\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots \frac{1}{10^{n!}} + \cdots$ *est transcendant.*

$$\begin{aligned} Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} &\leq (a_n + 1) Q_{n-1} \\ &\leq (a_n + 1) \cdots (a_1 + 1) \\ &\leq a_n \cdots a_1 \Big(1 + \frac{1}{10^{1!}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{10^{2!}}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{1}{10^{n!}}\Big) \\ &\leq a_n \cdots a_1 \Big(1 + \frac{1}{10^{1}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{10^{2}}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{1}{10^{n}}\Big) \end{aligned}$$

or, $\ln\Big(1 + \frac{1}{10^1}\Big) + \cdots + \ln\Big(1 + \frac{1}{10^n}\Big) \leq \frac{1}{10^1} + \cdots + \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{9}$, d'où :

$$Q_n \leq e^{1/9} a_1 \cdots a_n \leq 2.10^{1!+2!+\cdots+n!} \leq 2.10^{2(n!)}.$$

Alors, si la limite est algébrique de degré d :

$$(\mathcal{I}) \Rightarrow 10^{(n+1)!} \leq K[10^{2(n!)}]^{d-2} \Rightarrow (n+1)! \leq (2d-4)n! + \log_{10} K$$

ce qui est absurde. ■

Dès son premier article, LIOUVILLE indique que l'on peut se passer des fractions continuées en employant des séries, par exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^{n!}}, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

Il montre ainsi que ses nombres forment, selon sa propre expression, *"des classes très étendues"* (15).

(15) La seule famille que l'on vient d'expliciter a la puissance du continu, mais CANTOR ne passera par là qu'en 1874...

III.4. L'héritage de LIOUVILLE :

Il comporte deux directions, que l'on pourrait schématiquement qualifier, l'une de "théorique", l'autre de "pratique".

i) *en théorie*, il s'agit d'étudier si l'exposant de LIOUVILLE d de A.2 peut être amélioré, c.a.d diminué, sachant qu'il ne peut descendre en dessous de 2, car tout réel est ainsi approché par son développement en fraction continue. Seront successivement obtenus, avec $\varepsilon > 0$ quelconque :

$$\frac{C_1}{Q_n^d} \leq \frac{C_2}{Q_n^{1+\frac{d}{2}+\varepsilon}} \leq \frac{C_3}{Q_n^{2\sqrt{d}+\varepsilon}} \leq \frac{C_4}{Q_n^{2+\varepsilon}} \leq \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leq \frac{1}{Q_n^2}$$

LIOUV.	THUE	SIEGEL	ROTH
1844	1909	1921	1955

Le résultat de ROTH apporte une réponse quasi définitive : *Aucun algébrique n'est approchable à un ordre* $r > 2$. Mais il a l'inconvénient de ne donner aucune valeur explicite de C_4.

ii) *en pratique*, on peut rechercher des mesures d'irrationalité **explicites**, pour des irrationnels comme pour des transcendants. L'idée remonte à Emile BOREL, qui souligne dès 1899 l'intérêt d'estimations effectives Ainsi :

exemple 1 : π. Il n'est pas de LIOUVILLE, c'est ce qu'a découvert le premier MAHLER ; par la suite les exposants ont été "améliorés" :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{42}} \quad \text{MAHLER} \quad 1953$$
$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{21}} \quad \text{MIGNOTTE} \quad 1974$$
$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{14.65}} \quad \text{CHUDNOVSKY} \quad 1984$$

Et, pour ceux qui ne seraient pas convaincus de l'actualité du thème :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{8.0161}} \qquad HATA \qquad 1992$$

Jusqu'où peut-on descendre ? Mystère, qu'on espère provisoire.

exemple 2 : $\sqrt[3]{2}$. Ici, en contraste avec le cas précédent, l'objectif optimal est indiqué sans équivoque par le théorème de ROTH. Cela ne le rend pas pour autant trivial à atteindre avec des constantes explicites ! Les dates témoignent :

$$\begin{array}{lll}
\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{6q^3} & \text{LIOUVILLE} & 1884 \\
\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{10^{-6}}{q^{2.955}} & \text{BAKER} & 1964 \\
\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^{2.429}} & \text{CHUDNOVSKY} & 1983
\end{array}$$

A étant encore explicitable.

Une source féconde est la construction d'approximants de PADE avec restes **explicites**, par exemple :

$$Q(x)\sqrt[3]{1-x} - P(x) = R(x), \quad P, Q, R \text{ calculés.}$$

THUE, le premier, en 1908, était parti de cette méthode dans ses recherches sur l'abaissement de l'exposant de LIOUVILLE ; mais ses résultats restaient très limités à des racines nièmes. C'est en renonçant, en 1909, à une construction explicite au profit d'une existence affirmée d'après le principe des tiroirs de DIRICHLET qu'il a obtenu son résultat, au prix d'une constante non calculée. Puissante innovation reprise par ses successeurs, mais l'intérêt réactivé pour les mesures d'irrationalité a ainsi ramené le balancier de l'histoire à ses premières idées !

Bibliographie succinte :

[1] SERFATI Michel *Quadratures du cercle, Fractions continues et autres contes.* Brochure APMEP n 86 (1992)

[2] Le PETIT ARCHIMEDE, *numéro spécial* π Revue du Palais de la Découverte (1980), réédition ADCS (1992)

[3] LEBESGUE Henri *Leçons sur les Constructions Géométriques.* Gauthier-Villars (1950), réédition J. Gabay (1987)

[4] WALDSCHMIDT Michel *Les débutss de la Théorie des Nombres Transcendants.* Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Université Pierre et Marie CURIE, n 4

Volontairement limitée, dans un souci d'efficacité, à des références qui ont, à mes yeux au moins, le triple avantage d'être accessible (y compris financièrement), riches et -last but not least- **agréables** à consulter, elle s'accompagnera inévita blement, pour les gourmets, qu'ils soient connaisseurs ou simplement curieux, d'une dégustation des articles originaux des héros de cette épopée, dont [1] fournit, de manière exhaustive, les références complètes.

APPENDICE : Les ruminations d'HERMITE

Ce qui suit dépasse un peu, à l'évidence, la borne que l'on s'était fixée au départ : *Avant HERMITE ...* . Cela se situe *pendant et après*, référence prise, bien-sûr, par rapport à la transcendance de e.

Il nous a toutefois semblé instructif d'inclure ces varaintes des démonstrations d'irrationalité, où l'on voit progressivement les fractions continuées s'éclipser au profit des approximants de PADE. On saisira mieux ainsi la genèse du sujet donné à PADE, et les propos d'introduction de sa thèse (1892) :

"Nous avons été amenés à nous occuper de cette question par une parole de Monsieur HERMITE, recueillie dans une de ses leçons, et par laquelle il laissait entrevoir les richesses que cachait sans doute encore cette théorie."

A.0. Le contexte :

C'est probablement à force de "démonter et remonter la démonstration de LAMBERT pour voir comment ça marche" que HERMITE esr parvenu à la transcendance de e. Dans ce chemin souvent refait, il n'est donc pas surprenant qu'il découvre quelques raccourcis, et la **variante 1** ci-dessous est à cet égard édifiante : non seulement elle est contemporaine du fameux mémoire *Sur la fonction exponentielle* de 1872, mais elle sert d'illustration pédagogique à la première étape de ce mémoire.

Il est beaucoup plus remarquable que les deux suivantes lui soient **postérieures** (de peu, il est vrai : 1873) : la possession d'un résultat plus fort ne le détourne pas de son sujet de méditation !

Que fait HERMITE ?

Il simplifie, bien sûr, et de deux façons :

- en gommant le recours à la fraction de LAMBERT, le relais étant pris par l'obtention directe de l'approximation rationnelle -évidemment de PADE ! -jadis donnée par les réduites : c'est la **variante 1**. Avec quelques regrets, c'est clair : *"L'expression de LAMBERT, que j'évite ainsi d'employer, n'en reste pas moins un résultat du plus grand prix, et qui ouvre la voie à des recherches curieuses et intéressantes."*

- en évitant l'expression intégrale du reste; il ne recourt plus alors qu'à la série entière de l'exp et à la formule de dérivation de LEIBNITZ : c'est la **variante 2**, *"une démonstration nouvelle,... où n'intervient plus le calcul intégral, et qui, je l'espère, parîtra entièrement élémentaire."*

Pourquoi le fait-il ?

A coup sûr par sagesse, peut-être par folie !

Par sagesse, car le mot même de philosophie est trop peu pour cette bannière qu'il brandit en présentant la **variante 2** :

"On reconnaîtra volontiers que, dans le domaine mathématique, la possession d'une vérité importante ne devient complète et définitive qu'autant qu'on a réussi à l'établir par plus d'une méthode."

Par folie, peut-être : comment pourrait-il s'empêcher de rêver à π, lui le vainqueur de e ? Et si, en rôdant autour de la montagne, il avait soudain l'illumination de la voie vers le sommet ? Ce désir, qu'il est trop sage pour proclamer, pourrait bien avoir guidé la **variante 1bis**, introduite par des dénégations un peu trop appuyées (il s'agit de la lettre à BORCHARDT citée en introduction, notes 1 et 2) pour ne pas trahir quelques arrière-pensées.... A l'appui de cette hypothèse, le témoignage d'un mathématicien très proche de lui (puisqu'il était aussi son gendre), Emile PICARD : *"Peut-être avait-il songé un instant à déduire de ce genre de considérations la transcendance de π.*

Voici donc, par étapes essentielles, ces instructives variantes.

A.1. Variante 1 : sur e^r, sans fraction continuée :

i) Soit φ un polynôme de degré k au plus. Calculer $\psi'(t)$ pour

$$\psi(t) = e^{tx}\left(\frac{\varphi(t)}{x} + \frac{\varphi'(t)}{x^2} + \cdots + \frac{\varphi^k(t)}{x^{k+1}}\right)$$

En déduire : $\exists (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \text{uniques}, \deg P \leq k, \deg Q \leq k$ tels que :

$$Q(x)e^x - P(x) = x^{k+1}e^x \int_0^1 \varphi(t)e^{-xt}dt$$

ii) Exprimer les coefficients de P et Q avec les dérivées en 0 et 1 de φ.

iii) On prend $\varphi_n(t) = \dfrac{t^n(1-t)^n}{n!}$; déduire de ii) que $P \in \mathbb{Z}_k[X], Q \in \mathbb{Z}_k[X]$.

On dispose donc, à ce stade, de P_n et Q_n tels que :

$$Q_n(x)e^x - P_n(x) = x^{2n+1}e^x \int_0^1 e^{-xt}\frac{t^n(1-t)^n}{n!}dt$$

rem : un développement en série entière du second membre assure qu'il s'agit de l'approximant de PADE $[n/n]$ de l'exponentielle.

iv) En déduire, pour $x > 0$, l'*Inégalité CLEF* :

$$|Q_n(x)e^x - P_n(x)| = \frac{x^{2n+1}}{n!}e^x$$

v) Application à l'irrationalité :

Soit $r > 0, r = p/q$; supposons alors $e^r = a/b$, où a, b, p, q sont entiers.

$$\left|Q_n(\frac{p}{q})\frac{a}{b} - P_n(\frac{p}{q})\right| \leq \frac{a}{b}\frac{p^{2n+1}}{q^{2n+1}}\frac{1}{n!}$$
$$\Rightarrow E_n = q^n|Q_n(\frac{p}{q})a - P_n(\frac{p}{q})b| \leq a\frac{p^{2n+1}}{q^{n+1}}\frac{1}{n!}$$

et donc E_n est

un entier (les dénominateurs ont été chassés),

non nul (grâce à l'expression intégrale du reste),

et tel que $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$ (grâce à la majoration du reste).

La contradiction qui en résulte établit l'irrationalité de e^r. ∎

C'est toujours ce schéma de contradiction qu'emploiera HERMITE.

rem : Il ne faudrait pas croire qu'en iii), φ est parachutée : pour obtenir un approximant de PADE, il faut que $\deg P = p, \deg Q = q$ vérifient $p + q = k$. Déduire alors de ii) que $t^p(1-t)^q$ divise φ et conclure.

A.2. Variante 2 : sur e^r, sans expression integrale du reste :

i) Développer en série entière la fonction

$$A_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\left(e^x - \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right)$$

ii) Calculer $\left[x^{-n-1}e^x\right]^{(n)}$, $\left[x^{-n-1+k}e^x\right]^{(n)}$, et en déduire l'existence de polynômes explicites, unitaires $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}_n[X]$, tels que :

$$B_n(x) = A_n^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}(Q_n(x)e^x - P_n(x))$$

iii) Développer $B_n(x)$ en série entière : $B_n(x) = \sum_0^\infty b_{n,k} x^k$.

iv) Retrouver, en montrant $0 \leq b_{n,k} \leq 1/k!$, l'*inégalité CLEF*

$$x > 0, \quad |Q_n(x)e^x - P_n(x)| = \frac{x^{2n+1}}{n!} e^x$$

On achève évidemment de même. ■

A.3. Variante 1.bis : sur π et π^2, sans fraction continuée :

Soit

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos xt dt$$

i)Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = -x f_n'(x) + (2n+1) f_n(x)$.

ii) En déduire : $f_n(x) = Q_n(x) \sin x - P_n(x) \cos x$, avec $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}_n[X]$, en précisant leur parité.

iii) En déduire pour $x > 0$, l'*inégalité CLEF* :

$$|Q_n(x) \sin x - P_n(x) \cos x| \leq \frac{x^{2n+1}}{2^n n!}$$

iv) En supposant alors $\frac{\pi^2}{4} = \frac{p}{q}$, obtenir une contradiction. ■

L'exercice est souvent posé sous cette forme, sans autre commentaire, dans des livres, des sujets d'épreuves.... Quelle image cela peut-il donner aux étudiants d'un chercheur en Mathématiques ? N'est-il pas décourageant de penser, pour peu qu'on soit lucide, qu'on n'aura *jamais* soi-même l'idée de partir d'une telle fonction f_n ?

C'est pourtant simple : pour en partir, il fallait d'abord y être arrivé ! Mais si le fil d'Ariane est rompu, quelle exceptionnelle sagacité sera requise pour deviner sous l'expression de f_n la fraction de LAMBERT et le rôle complice des fonctions de BESSEl !

Car c'est bien de cela qu'il s'agit. Rappelons-nous nos conclusions du paragraphe II.3, où l'on avait

$$Q_n(x) \sin x - P_n(x) \cos x = x^{n+1/2} J_{n+1/2}(x)$$

Il suffit alors de disposer de la formule intégrale :

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos xt dt \qquad (\mathcal{F})$$

pour comprendre de quelle fonction on peut innocemment proposer l'étude .... Quant à $(\mathcal{F})$, on l'obtiendra très simplement en développant l'intégrale en série entière, et en utilisant les intégrales binômes

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ce qui permet de retrouver J_ν comme série entière.

C'est donc une longue marche d'approche qui amène HERMITE à ce point de départ. Inspiration certes, transpiration aussi...Avec HERMITE, au moins, les Mathématiques sont oeuvre humaine. Ce qui n'enlève rien à son génie mais nous le rend tellement plus attachant...