

# Mathématiques des tracés de voies ferrées

Carlos Sacré ( Université Lille I )

12 mars 2001

## Résumé

Vers la fin des années 1980, deux ingénieurs de la SNCF ont contacté l'unité associée de Mathématiques du CNRS de Lille (Université de Lille I) en vue d'élaborer un logiciel permettant le tracé de voies TGV en zone urbaine, leur logiciel de calcul d'aide au tracé de voies ne remplissant pas cette fonction. L'élaboration d'un nouveau logiciel a demandé l'étude de la structure des courbes utilisées pour le tracé des voies ferrées : lignes droites et arcs de cercle reliés par des arcs de clothoïde destinés à rendre la courbure continue. Après l'étude de ces courbes, on peut aborder les problèmes pratiques dont la plupart consistent à relier deux voies de positions données. Les notions mathématiques qui interviennent dans cet exposé relèvent de la mécanique, de la géométrie différentielle et de la géométrie élémentaire plane, en particulier les isométries.

## 1 Introduction

Un beau jour de 1987, Jean-Paul Brasselet, alors directeur de l'UA 851, unité associée au CNRS à Villeneuve d'Ascq (Université de Lille I) a reçu deux ingénieurs-projeteurs de la SNCF. Ces personnes travaillaient à Lille dans le service régional chargé de l'étude des tracés de voies, en particulier pour le passage de la ligne du TGV au travers de l'agglomération lilloise. Vus la concentration urbaine et les vitesses des trains ce tracé était tributaire de contraintes très serrées.

Traditionnellement, ils travaillaient avec un certain logiciel et celui-ci était devenu inutilisable pour des raisons techniques. Ils souhaitaient de façon relativement urgente le remplacement de ce logiciel, voire l'extension de ses capacités, avec des possibilités de tracé automatique. Ils ont pensé à contacter les mathématiciens travaillant dans notre université.

Après une étude préliminaire, un contrat a été signé entre la SNCF et le CNRS pour la réalisation de ce projet. Pour ma part j'ai étudié la partie

théorique : types de courbes utilisées par la SNCF, méthodes de calcul, résolution théorique des problèmes que j'expose plus loin. Patrick Van Ingelandt, ingénieur de l'UA du CNRS a réalisé le logiciel. Sous la direction de Jean-Luc Munoz, deux étudiants de fin d'étude à l'EUDIL ont mené à bien l'interface avec le logiciel Autocad permettant la visualisation sur écran et le tracé sur papier. Le logiciel a pu être fourni en novembre 1989.

## 2 Les principes

Dans un premier temps, nous allons étudier les principes qui président à la géométrie des réseaux ferroviaires. Ces principes sont basés sur des considérations mécaniques : les voies ferrées sont faites pour que des trains roulent dessus, et sur des considérations pratiques : il faut que le tracé des lignes puisse être fait commodément dans les bureaux d'étude et réalisé sur le terrain.

### 2.1 Un premier modèle

La première image qui peut venir à l'esprit peut être l'enchevêtrement de voies que l'on peut observer à l'entrée des grandes gares SNCF. Ce n'est pas de celle-ci que nous partirons : d'une part c'est une situation des plus complexes à cause de la présence des nombreux appareils de voie, aiguillages et croisements qui n'entrent pas dans notre projet. D'autre part, la SNCF dispose de toute une gamme d'appareils de voie préfabriqués (à partir des principes que nous allons voir) et qu'il suffit d'insérer pour relier deux lignes. Dans toute la suite de cet exposé, nous ne reviendrons pas sur les appareils de voie.

Une deuxième image, très simple, est celle des trains électriques jouets. La voie y est réalisée au moyen de deux grands types de rails : les rails droits et les rails courbes (figure 1).

Notons que le mot rail est utilisé ici dans un sens impropre : le rail est en effet le profilé d'acier sur lequel roule la roue, il faut deux rails pour faire une voie. Dans le langage des jouets, un rail est une plaquette de plastique sur laquelle sont montés les deux profilés. Nous utiliserons quand même le mot rail ici dans ce sens pour la commodité.

Il y a donc pour les trains jouets des rails droits et des rails courbes, de diverses longueurs préétablies et de divers rayons de courbure, trois rayons par exemple pour telle marque. Cela permet des réseaux de formes variées, quitte à jouer sur une légère déformation possible pour raccorder les tronçons quand les longueurs ne tombent pas juste.

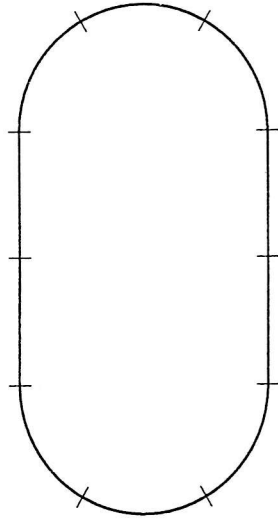


FIG. 1 - Un réseau jouet très simple

Ce modèle simple n'est toutefois pas utilisable pour les voies ferrées en vraie grandeur, non pas pour des questions de déformation, puisque dans ce contexte il est toujours possible de couper les rails aux dimensions voulues et de les souder, mais pour des raisons beaucoup plus sérieuses qui tiennent à la mécanique.

Considérons en effet une locomotive ou une voiture de masse  $m$  roulant à vitesse uniforme  $v$  sur un tronçon de voie circulaire de rayon  $r$ . Ce véhicule est soumis à des forces dont la somme algébrique doit être nulle. Si on néglige les forces de frottement équilibrées par la force motrice qui entretient la vitesse, ces forces sont :

- la pesanteur de direction verticale, de module  $mg$ ,
- la force centrifuge horizontale dirigée suivant le rayon du cercle, vers l'extérieur, de module  $mv^2/r$ ,
- la réaction de la voie.

Pour des raisons qui tiennent à la fois à la sécurité et à l'usure du matériel, il est indispensable que la force de réaction de la voie soit perpendiculaire au plan de celle-ci, ou au moins que sa direction soit proche de celle de la perpendiculaire. Comme la pesanteur est verticale, cette condition exige que la voie ait un *dévers*, c'est-à-dire que les deux rails constituant la voie ne soient pas à la même altitude (voir figure 2). De façon précise, le rail extérieur doit être plus haut que le rail intérieur d'une quantité

$$d = \frac{v^2}{rg}e, \quad (1)$$

où  $e$  est l'écartement des deux rails qui vaut 1,435 m pour la plupart des chemins de fer européens. C'est cette longueur  $d$  qui est le dévers.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Selon les pays la façon d'introduire le dévers sur le terrain peut différer. En France,

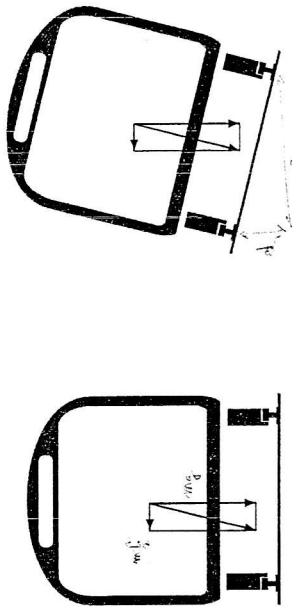


FIG. 2 - Équilibre des forces

L'écartement des rails étant imposé, ainsi bien évidemment que la pesanteur, l'équation (1) montre que le dévers dépend du rayon du cercle, fixé une fois pour toutes pour chaque tronçon de la voie, et de la vitesse des trains. Quand on établit la voie, elle est prévue pour une certaine vitesse ; cela ne veut pas dire que cette vitesse soit absolument imposée ; il faut évidemment une tolérance pour que le train puisse s'arrêter n'importe où en cas d'incident, ce qui limite dans la pratique la valeur maximum du dévers et la valeur minimum du rayon de courbure (minimum influencé aussi par la longueur des voitures) en fonction de la vitesse maximum qui sera autorisée sur la voie.

Nous pouvons voir maintenant pourquoi le modèle train jouet est irréaliste en grandeur réelle. En courbe, il y a un dévers ; en ligne droite, il n'y a pas de dévers, ou si on préfère le dévers est nul. Quand on passe d'un tronçon droit à un tronçon courbe, ou quand on change de rayon de courbure, il y a, ou plutôt il y aurait, une discontinuité dans l'altitude des rails. C'est manifestement une absurdité mécanique, sans parler du confort des voyageurs !

Dans le cas des jouets, le dévers existe bien pour les rails (doubles) courbes, mais à l'endroit du raccord avec les rails droits, il est absorbé par la souplesse des tronçons de voies. Il n'empêche qu'à cette échelle, les vitesses sont relativement limitées, et que les déraillements sont plus fréquents que dans le monde des compagnies ferroviaires.

Ayant vu ce problème du dévers, désormais, nous n'aurons plus besoin de distinguer entre les deux rails. La voie ferrée sera assimilée à une ligne idéale

l'axe central de la voie reste à la même altitude (au moins en terrain plat !) et les rails droit et gauche pivotent autour de cet axe. Dans d'autres pays l'un des rails reste à la même altitude, et l'autre s'élève ou s'abaisse par rapport au rail de référence, comme le suggère la figure 2.

qui passe entre les deux rails : l'axe de la voie. Dans la pratique, puisque les voies vont généralement par deux pour la circulation des trains dans les deux sens, cette ligne idéale sera celle qui passe à égale distance entre ces deux voies. Une fois déterminée sur le terrain, les deux voies seront posées parallèlement à cette ligne, à la distance réglementaire...

Pour en terminer avec ce modèle, considérons l'analogue avec les trajectoires automobiles. Les principes de tracé des routes sont très proches de ceux des tracés ferroviaires. Le conducteur d'une automobile qui voudrait imiter le modèle des trains jouets serait amené pour prendre un virage à tourner brusquement son volant d'un certain angle, par exemple un demi-tour, puis laisser son volant fixe, et à la sortie du virage, ramener aussi brusquement son volant à la position droite. Tous ceux qui ont leur permis imaginent.

## 2.2 Un deuxième modèle

Une deuxième image qu'on peut avoir est celle des courbes que l'on rencontre en mathématiques, qui répondent à une formule. Les mathématiciens ne manquent pas de formules qui donnent des courbes suffisamment régulières pour éviter les problèmes de discontinuité. Si prendre une voie de classe  $C^1$ , c'est le cas du modèle des trains jouets, ne suffit pas, prenons des courbes de classe  $C^2$ ,  $C^3$ , ... suffisamment pour satisfaire les contraintes mécaniques.

Or utiliser des formules arbitraires pour établir une ligne pose des problèmes pratiques de tracé en bureau d'études et de réalisation sur le terrain. De plus, on ne peut utiliser une même formule pour toute une ligne (imagine-t-on la complexité que devrait avoir une formule donnant un tracé Paris-Lille ?), et donc de toutes façons il faut raccorder des tronçons répondant à des formules différentes. Sans compter que pour un tas de bonnes raisons que l'on peut imaginer, il est souhaitable d'avoir un maximum de tronçons en ligne droite.

La solution consiste à retenir le premier modèle : des droites et des cercles, mais que l'on relie par des raccords le long desquels la courbure est variable, de façon à éviter les discontinuités.

Avant de voir comment sont faits ces raccords, ce qui nous demandera d'étudier la notion de courbure, qui depuis longtemps n'est plus traitée dans le premier cycle des études universitaires, nous introduirons quelques mots du vocabulaire de la SNCF que nous serons amenés à utiliser par la suite :

**alignement** : il s'agit d'une partie de voie en ligne droite, affecté d'un sens de parcours ; un alignement sera habituellement défini par un couple de points de la droite (pas nécessairement les extrémités du tronçon), déterminant à la fois la droite et le sens de parcours ;

Ou bien un carré :

- avance 50
- tourne 90
- avance 50
- tourne 90
- avance 50
- tourne 90
- avance 50

En diminuant l'angle, (et en ajustant éventuellement la longueur du côté) on peut ainsi décrire des polygones réguliers ayant plus ou moins de côtés; s'il y a suffisamment de côtés, l'apparence de la figure est celle d'un cercle. Si le côté est  $l$  et l'angle  $\alpha = 360/n$ , le polygone a  $n$  côtés, son périmètre est  $nl$ , ce qui correspond à un rayon  $r = nl/(2\pi) = 360l/(2a\pi)$ . Si nous exprimons l'angle en radians,  $A = a\pi/180$ , on trouve que le rayon est  $r = l/A$ : si on tourne de  $A$  radians chaque fois qu'on avance de  $l$  mètres, on décrit un cercle de rayon  $r$  mètres.



Pour englober le cas  $A = 0$ , qui donne pour trajectoire une droite, il est commode, plutôt que  $r$ , de considérer  $c = 1/r$  que l'on appellera la courbure. La formule précédente donne alors :

$$c = \frac{A}{l} \quad (2)$$

Pour un cercle ou une droite, la courbure est donc l'angle dont on tourne quand on parcourt l'unité de longueur; elle est exprimée en  $m^{-1}$ . Pour un cercle, elle est l'inverse du rayon; pour la droite, elle est nulle.

Et pour une courbe quelconque?

Considérons une courbe paramétrée  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  (il s'agit ici d'une courbe au sens mathématique du terme, pas nécessairement un arc de cercle). Nous supposons que le paramétrage est de classe  $C^2$  et que la courbe n'admet pas de point singulier: le vecteur tangent ne s'annule pas. La longueur de l'arc de courbe compris entre les points de paramètres  $t_0$  et  $t_1$  est donnée par la formule

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Au point de paramètre  $t$ , le vecteur tangent fait avec  $Ox$  un angle  $\alpha$  tel que

$$\tan \alpha = \frac{y'}{x'}$$

tout au moins si  $x' \neq 0$  (comme  $x'$  et  $y'$  ne s'annulent pas simultanément, si  $x' = 0$ , on peut repérer l'angle par sa cotangente).

**courbe** : dans le vocabulaire SNCF, ce mot est réservé aux tronçons qui sont des arcs de cercle; une courbe peut être définie par le centre et le rayon, ou le centre et un point, ou par deux points et le rayon, ou encore par trois points; ici encore le sens de parcours est essentiel, et peut être précisé par exemple par le signe du rayon : positif pour le sens trigonométrique, négatif pour le sens rétrogradé;

**raccord ou raccord parabolique** : les tronçons qui servent à raccorder alignements et courbes et que nous allons étudier plus loin; malgré le nom, il ne s'agira jamais d'arcs de parabole.

### 3 La clothoïde

Pour raccorder des alignements et des courbes, il y a plusieurs procédés; celui utilisé par la SNCF consiste à faire varier la courbure de façon affine par rapport à l'abscisse curviligne, pour relier un alignement où la courbure est nulle à une courbe où la courbure est constante non nulle. Mais qu'est-ce au juste que la courbure?

#### 3.1 Notion de courbure

Pour comprendre la notion mathématique de courbure, il sera commode d'utiliser une *tortue logo*, même virtuelle.

La tortue *logo* est un logiciel utilisé en particulier pour aider des élèves, en particulier ceux en difficulté, à appréhender la géométrie par des déplacements corporels, simulés sur un écran d'ordinateur. La tortue, symbolisée par un triangle isocèle pointu répond à des ordres qui sont essentiellement :

- avance  $l$ , qui la fait avancer de  $l$  unités, dans la direction définie par la pointe de la tortue;
- tourne  $a$ , qui fait tourner la tortue de  $a$  degrés autour de son centre;  $a$  peut être positif ou négatif pour tourner dans un sens ou dans l'autre; faisant abstraction de la convention prise pour la tortue *logo*, nous conviendrons que l'on tourne dans le sens trigonométrique si  $a$  est positif.

On peut ainsi faire décrire à la tortue (ou à l'élève) un alignement :

avance 150

ou

avance 10

avance 10

...

Cette fois la longueur  $s(t)$  parcourue entre les instants  $t_0$  et  $t$ , et l'angle  $\alpha(t)$  ne sont plus comme pour les mouvements considérés plus haut des fonctions affines de  $t$ , mais on peut généraliser en définissant la courbure, non plus comme  $A/l$ , mais comme

$$c = \frac{d\alpha}{ds} \quad (3)$$

la limite du rapport de la quantité dont on tourne à la distance parcourue quand cette dernière (ou l'accroissement de  $t$ , ce qui revient au même) tend vers 0.

### 3.2 Définition de la clothoïde

La clothoïde peut maintenant être définie comme une courbe telle que la courbure soit fonction affine de l'abscisse curviligne :

$$c = 2\gamma s + c_0,$$

équation *intrinsèque* de la clothoïde, c'est-à-dire, équation reliant la courbure et l'abscisse curviligne, intrinsèque dans ce sens qu'elle est indépendante de tout repère (orthonormé).

Nous restreindrons cette définition au cas où  $\gamma \neq 0$ , sinon on vérifie facilement que la courbe est une droite (si  $c_0 = 0$ ) ou un cercle (si  $c_0 \neq 0$ ).

Pour étudier une telle courbe, commençons par simplifier l'équation : au moyen d'un changement d'origine des abscisses curvilignes, on peut se ramener au cas  $c_0 = 0$ , ce qui en tenant compte de la définition de la courbure (3) donne

$$c = \frac{d\alpha}{ds} = 2\gamma s. \quad (4)$$

En prenant les primitives des deux membres :

$$\alpha = \gamma s^2 + c_0,$$

quitte à transformer par rotation le système d'axes, on peut supposer que  $c_0$ , l'angle entre  $Ox$  et la tangente au point origine des abscisses curvilignes est nul :

$$\alpha = \gamma s^2.$$

Considérons alors le vecteur tangent  $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$  : c'est un vecteur de longueur unité, faisant un angle  $\alpha$  avec  $Ox$  ; ses composantes sont donc  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \gamma s^2 \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \gamma s^2 \end{aligned}$$

D'où en prenant les primitives

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s \cos \gamma u^2 du + x_0 \\ y &= \int_0^s \sin \gamma u^2 du + y_0. \end{aligned}$$

Par translation du repère, on peut supposer  $x_0 = y_0 = 0$ , d'où les équations d'une clothoïde dans un repère bien choisi :

$$x = \int_0^s \cos \gamma u^2 du \quad (5)$$

$$y = \int_0^s \sin \gamma u^2 du. \quad (6)$$

On voit que ce paramétrage est obtenu avec les intégrales de Fresnel, qui par ailleurs servent en optique, pour décrire la diffraction de la lumière par un écran en forme de demi-plan...

### 3.3 Allure de la clothoïde

Pour  $\gamma = 1$ , le tracé est donné par la figure 3. Elle est appelée clothoïde par les techniciens de la SNCF ; chez les mathématiciens, elle est plutôt appelée *spirale de Cornu* ou *spirale d'Euler*.

Pour les valeurs positives de  $\gamma$ , on obtient des courbes homothétiques de la précédente ; pour  $\gamma < 0$ , il faut composer avec une symétrie par rapport à  $Ox$ .

On constate que la courbe a l'allure d'une double spirale, de longueur infinie, s'enroulant autour de points situés sur la première bissectrice ; on a en effet

$$\int_0^\infty \cos u^2 du = \int_0^\infty \sin u^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Bien entendu, dans l'application qui nous intéresse, il n'est pas question de tracer des voies ferrées qui s'enroulent en spirale autour d'un point... et on n'utilisera que la portion voisine de l'origine.

### 3.4 Calcul pratique

Les intégrales  $\int \cos \gamma u^2 du$  et  $\int \sin \gamma u^2 du$  (qui par changement de variable peuvent se ramener à la forme canonique  $\int \cos t^2 dt$  et  $\int \sin t^2 dt$ ) ne sont pas calculables au moyens des transcendentes élémentaires... En réalité, cette difficulté n'en est pas une, car il suffit d'intégrer, non pas les fonctions trigonométriques elle-mêmes, mais la partie principale de leurs développements limités à un ordre convenable.

$$y \approx \frac{\gamma^3 s^3}{3} - \frac{\gamma^7 s^7}{42} \quad (8)$$

Reprenant notre exemple ( $l = 150$  m,  $r = 500$  m), on trouve cette fois  $\Delta x \approx 0,3$  mm, et  $\Delta y$  est encore bien inférieur. On voit que cette précision est bien suffisante; en tout cas, on imagine que sur le terrain, ce ne sont pas ces erreurs qui limitent la précision du tracé. D'autant plus que les votes une fois posées ont tendance, malgré le ballast, à se déplacer horizontalement au fur et à mesure du passage des trains...

### 3.5 Un premier problème

Nous pouvons résoudre maintenant l'un des problèmes les plus simples qui font intervenir un raccord, et dont la solution est souvent utilisée pour résoudre des problèmes plus complexes.

Il s'agit de l'implantation d'une courbe C tangente à un alignement A connu, connaissant le rayon de la courbe C, l'implantation de l'ORP sur A et la développée sur C entre le FRP et le PIC<sup>2</sup>.

Autrement dit, on donne un alignement (une droite) A et un point ORP<sup>2</sup> de A, ainsi qu'un rayon de courbure  $r$  (positif ou négatif). On cherche un arc de clothoïde RP<sup>3</sup> permettant de relier l'alignement A, à partir du point ORP, à une courbe C (un cercle) de rayon  $r$  (positif ou négatif). Comme dans tous les problèmes de ce genre il est implicite que la continuité de la courbure est exigée. Il est toujours implicite aussi que les longueurs des raccords paraboliques font partie des données; nous noterons  $l$  la longueur donnée.

Pour résoudre le problème, nous prendrons un repère (orthonormé comme chaque fois qu'il est question de courbure : il est immédiat que la courbure est une notion essentiellement euclidienne) dont l'origine est ORP, dont l'axe Ox est porté par A, dans le sens défini par l'alignement. L'arc de clothoïde qui permet le raccordement est alors défini par les formules (5) et (6) où il reste à déterminer  $\gamma$ .

Or on sait que pour  $s = l$ , la courbure est  $1/r$ . Mais d'après la formule (4), en ce point la courbure est  $2\gamma l$ ; on en tire

$$\gamma = \frac{1}{2rl}$$

Notre arc de clothoïde est donc parfaitement déterminé par les formules (5) et (6), pour  $0 \leq s \leq l$ . Pour  $s = 0$  le paramétrage donne le point ORP,

<sup>2</sup>ORP pour "origine de raccord parabolique".  
<sup>3</sup>RP pour "raccord parabolique".

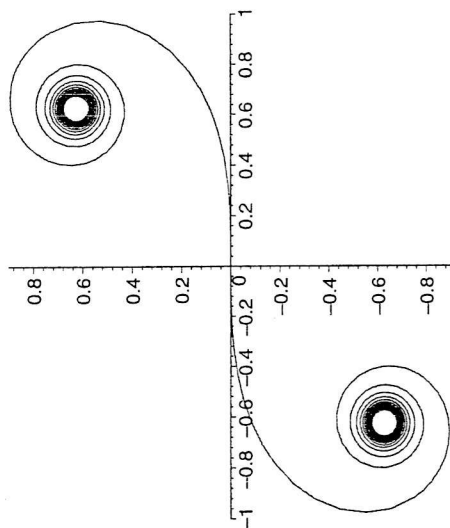


FIG. 3 - allure de la clothoïde

Si on se restreint à l'ordre 1,  $\cos t = 1 + t\epsilon(t)$ ,  $\sin t = t + t\epsilon(t)$ , on obtient le paramétrage de la *parabole cubique* (qui n'est pas une parabole!) :

$$x \approx s$$

$$y \approx \frac{\gamma}{3}s^3$$

Cette courbe a été utilisée, et est peut-être encore utilisée par la SNCF. Quoi qu'il en soit, le nom de *raccord parabolique* est resté, même pour les clothoïdes mieux approchées.

Voyons sur un exemple l'ordre de grandeur de l'erreur commise. Considérons le cas  $s = 150$  m pour une clothoïde telle que le rayon de courbure en ce point de paramètre  $s$  soit  $r = 500$  m. Ce sont des ordres de grandeurs cohérents avec ceux de la SNCF, parmi ceux qui donnent les erreurs les plus grandes. Le paramétrage de la parabole cubique donne alors des erreurs  $\Delta x \approx 34$  cm et  $\Delta y \approx 1$  cm. On voit que les erreurs sont relativement faibles, mais quand même conséquentes, au moins la première.

Si nous restreignons un peu moins l'ordre du développement limité, en prenant l'ordre 3,  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\epsilon(t)$ ,  $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3\epsilon(t)$ , on obtient le paramétrage :

$$x \approx s - \frac{\gamma^2}{10}s^5 \quad (7)$$

et pour  $s = l$  le point FRP<sup>4</sup>.

Il nous reste à préciser le cercle C. Nous en connaissons le point FRP, le rayon  $r$ , et nous connaissons aussi la tangente en FRP : c'est la tangente à la clothoïde, dont l'angle avec  $Ox$  est  $\gamma l^2 = \frac{l}{2r}$ . Le centre de C est ainsi déterminé : il suffit de reporter la longueur  $|l|$  dans le sens convenable sur la normale en FRP à RP.

Le cercle étant ainsi complètement déterminé, il est alors possible de déterminer (c'est le but ultime du problème pratique) les coordonnées du point PIC de C qui se trouve à une distance imposée en suivant la voie (cette distance est la *développée*) de FRP.

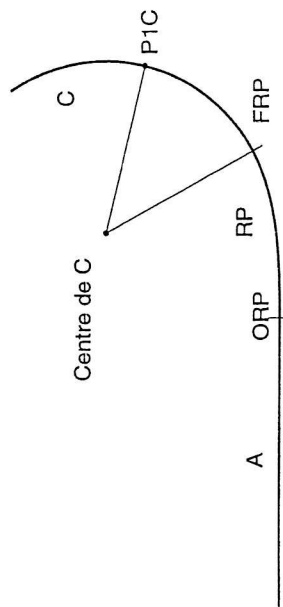


FIG. 4 - raccordement

La figure 4 montre ce raccordement pour  $l = 100$  m et  $r = 100$  m. Ces valeurs ne sont pas très réalistes par rapport aux tracés ferroviaires : habituellement, les rayons de courbure sont plusieurs fois supérieurs aux longueurs des raccords, mais elles permettent d'avoir une figure plus claire.

### 3.6 Structure d'une ligne

Ayant ainsi étudié cette clothoïde qui permet une variation continue de la courbure, nous pouvons considérer la voie comme une alternance de tronçons en alignement ou en courbe, raccordés par des *raccords paraboliques* qui sont des arcs de clothoïde. On assiste souvent à l'alternance alignement-courbe-alignement-courbe-alignement-courbe-etc. Sur les schémas, conformément à l'usage de la SNCF, les alignements sont désignés par A, A1, A2, ... les raccords *paraboliques* par RP, RP1, ... et les courbes par C, C1, ...

<sup>4</sup>FRP pour "fin de raccord parabolique".

La courbure est ainsi une fonction affine par morceaux de l'abscisse curviligne. Son graphe (figure 5) présente des paliers constants raccordés par des segments obliques.

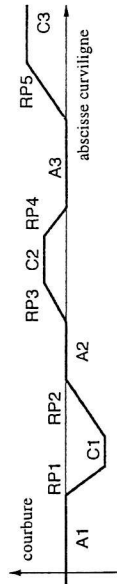


FIG. 5 - Variations de la courbure en fonction de l'abscisse curviligne.

Comme le dévers est proportionnel à la courbure (et au carré de la vitesse prévue), le même graphique est valable pour le dévers. On constate que ce profil est continu, mais pas dérivable. Mécaniquement cela signifie que la composante verticale de la vitesse de la partie non suspendue des voitures (les extrémités des essieux des roues par exemple), qui sont proportionnelles à la variation du dévers (et à la vitesse d'un train) subit des discontinuités au début et à la fin des raccords. C'est évidemment intolérable, mais pratiquement, cela se règle par des *doucines*, arcs de sinusoides qui sont une façon technique d'arrondir les angles, au sens propre du terme.

La figure 4 montre une portion de voie où on a représenté une seule alternance alignement-raccord-courbe.

## 4 Quelques problèmes

Voyons maintenant quelques problèmes du type qui se posent pratiquement à la SNCF. Nous n'aborderons pas les problèmes des types cités immédiatement ci-après, soit parce qu'ils sont purement techniques, soit parce qu'ils ne sont que des routines utiles pour les "vrais" problèmes :

- changements de repère : c'est classique, mais utilisé constamment dans les programmes informatiques ; nous avons bien vu par exemple que le paramétrage de la clothoïde a été donné dans un repère particulier, et qu'il faudra bien à un moment ou à un autre faire les calculs dans un repère imposé, au moins traduire le résultat des calculs faits dans un repère commode ;
- les problèmes d'implantation : il s'agit de calculer les coordonnées d'un point donné par son abscisse curviligne sur un alignement, une courbe ou un raccord parabolique ;
- les problèmes de projection : détermination des coordonnées d'un point d'un alignement, d'une courbe ou d'un raccord, le plus proche possible d'un point donné ;

– les problèmes d'intersection de deux voies, qui sont classiques entre droites et cercles, et qui dans les autres cas se ramènent par la méthode des approximations successives à des calculs d'implantations.

Les problèmes restants concernent l'établissement du tracé d'une voie ferrée, et consistent à chercher le raccordement de deux voies déjà fixées par quelques arcs respectant des conditions imposées.

#### 4.1 Implantation d'une courbe entre deux alignements

**Énoncé.** On considère deux alignements A1 et A2, donnés chacun par deux points. Il s'agit de raccorder ces alignements à une courbe C (non donnée) au moyen de deux raccords paraboliques RP1 et RP2. On impose comme d'habitude les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  de ces raccords paraboliques, et de plus, au choix :

- cas 1 : le rayon  $r$  de C ;
- cas 2 : l'implantation de l'ORP1 sur l'alignement A1 ;
- cas 3 : la distance  $d$  à la courbe C d'un point obligé et le signe du rayon.

Le résultat cherché correspond à la figure 6.

**Solution dans cas 1.** Nous procédons par analyse et synthèse.

À partir d'un point Q1 arbitraire de A1, construisons la solution du problème de la section 3.5, avec la longueur  $l_1$  pour le raccord, et la courbure  $1/r$  : on obtient le cercle C1, de centre O1 (voir figure 7).

De même, à partir d'un point arbitraire Q2 de l'alignement A2 (dont on reverse le sens), construisons la solution du même problème, avec la longueur  $l_2$  et la courbure  $-1/r$  : on obtient le cercle C2 de centre O2.

**Analyse :** Si nous avons une solution, correspondant aux notations de la figure 6, il est clair que la translation dont le vecteur a pour origine Q1 et pour extrémité ORP1 conserve l'alignement A1, ainsi que toutes les notions métriques, et en particulier les courbures et les angles ; de plus elle transforme Q1 en ORP1. Il s'ensuit qu'elle transforme C1 en C, et donc le centre O1 de C1 en le centre de C. Le centre de C appartient donc à la parallèle à l'alignement A1 menée par le point O1.

De même, le centre de C appartient à la parallèle issue de O2 à A2.

Le centre de C est donc l'intersection de deux droites connues, parallèles l'une à A1, l'autre à A2.

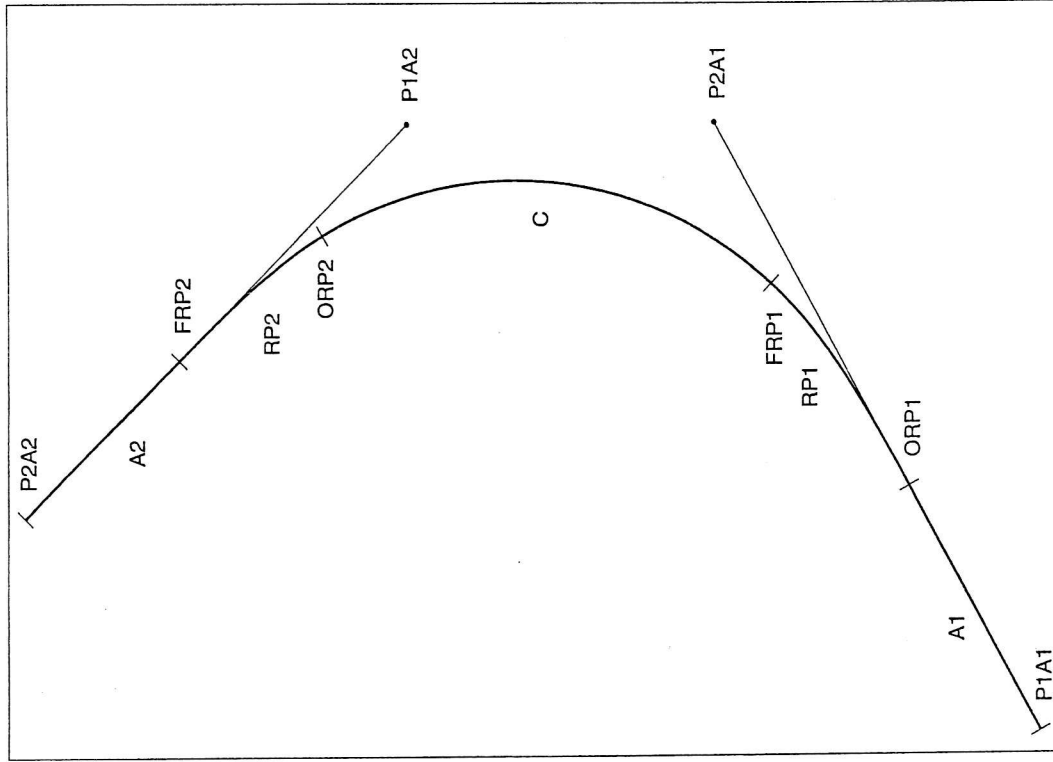


FIG. 6 – Raccordement de deux alignements



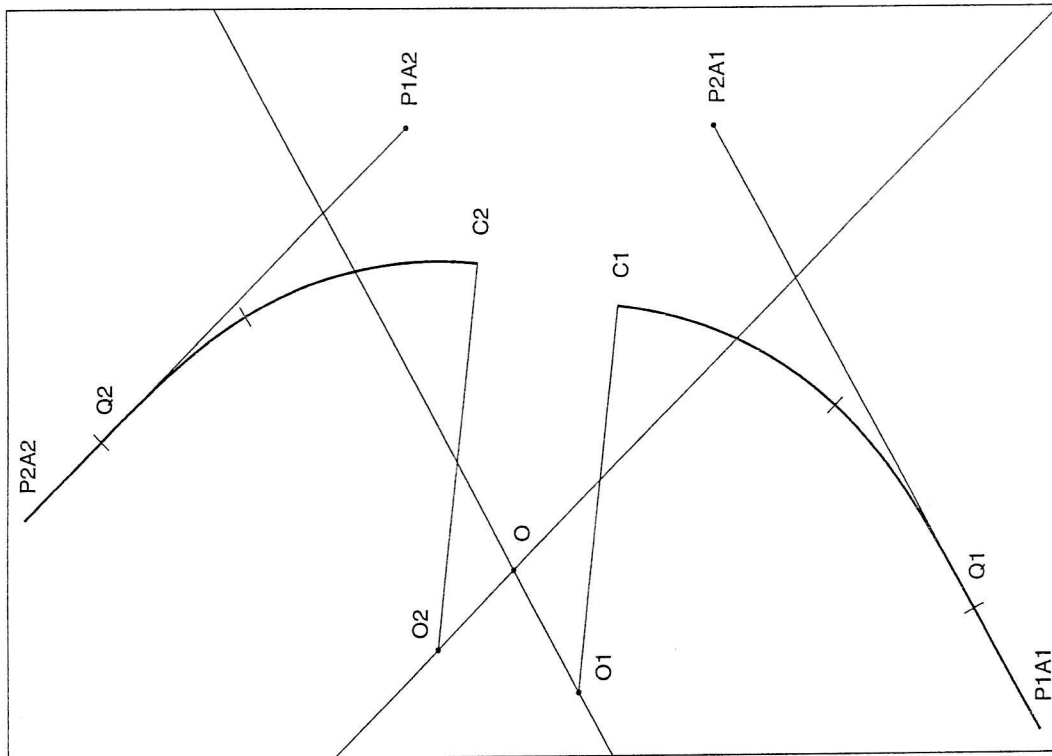


FIG. 7 - Raccordement de deux alignements : cas 1.

**Synthèse.** Soit O le point d'intersection des parallèles issues de O1 et O2 à A1 et A2 respectivement. La translation de vecteur  $\vec{OIO}$  transforme Q1 en un point ORP1 de A1, le raccord d'origine Q1 en un raccord d'origine ORP1, le cercle C1 en un cercle C et de rayon  $r_1$  qui donne une solution en ORP1 du problème de la section 3.5.

La translation de vecteur  $\vec{O2O}$  donne de même une solution sur A2, avec le même cercle C. On obtient donc une solution au problème posé.

**Discussion.** Il est clair que le problème admet une solution unique à condition que les parallèles à A1 et A2 se rencontrent, c'est-à-dire à condition que A1 et A2 ne soient pas parallèles.

On peut remarquer que le problème se ramène à celui de l'intersection de deux droites : c'est un problème du premier degré à une inconnue !

**Solution dans le cas 2.** On peut imaginer l'intérêt de cette contrainte si par exemple l'alignement A1 se termine par une gare que l'on préfère en ligne droite : on impose alors que l'ORP1 soit juste à la sortie de la gare.

Ce problème est *a priori* beaucoup plus complexe que le précédent, et dans la pratique, on le résout par approximations successives, en le ramenant au problème précédent et en jouant sur la valeur de  $r$ .

Considérons que l'ORP1 imposé est défini par son abscisse  $x$  dans un certain repère. On traite le problème dans le cas 1 pour deux valeurs arbitraires  $r_1$  et  $r_2$ ; on calcule les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  de ORP1 pour les solutions trouvées, on fait une règle de trois avec  $x_1 - x$ ,  $x_2 - x$  et les courbures  $1/r_1$  et  $1/r_2$ , ce qui donne un nouveau rayon  $r_3$ . On recommence avec  $r_2$  et  $r_3$  pour obtenir  $r_4$ , etc. On arrête les itérations quand l'ORP1 obtenu est assez proche de l'ORP1 imposé.

**Solution dans le cas 3.** On comprend la finalité ce type de condition : faire passer la voie à une distance fixée d'une installation déjà existante et difficile à déplacer. On peut imaginer par exemple que le train doit passer sur ou sous un pont déjà construit (et pas trop mal orienté...), auquel cas la distance imposée serait nulle.

Ici encore, le problème se traite par approximations successives, en comparant à la distance imposée les distances calculées pour des pseudo-solutions obtenus en choisissant arbitrairement  $r$ .

## 4.2 Implantation d'un alignement entre deux courbes

On considère cette fois deux courbes données  $C1$  et  $C2$ , et il s'agit de les raccorder au moyen d'un alignement, comme d'habitude au moyen de deux raccords paraboliques de longueurs données  $l_1$  et  $l_2$  : figure 8.

Ce problème se pose de façon analogue au précédent. Pour le résoudre, nous aurons besoin de résoudre d'abord un problème plus simple qui jouera pour cette implantation le même rôle que le problème de la section 3.5 pour l'implantation d'une courbe entre deux alignements donnés (section 4.1).

**Problème préliminaire.** Il s'agit de l'implantation d'une tangente  $A$  à une courbe  $C$  connue connaissant l'implantation sur la courbe  $C$  du FRP". On peut se référer à la figure 4.

Ce problème est le problème inverse du problème de la section 3.5 : dans ce dernier, on donnait l'alignement  $A$ , le point ORP, la courbure de  $C$  et la longueur du raccord RP. Maintenant on donne  $C$ , le point FRP et la longueur du raccord, et il s'agit de reconstituer la figure.

Nous allons utiliser le problème inverse pour résoudre le problème actuel : à partir d'un alignement arbitraire  $A'$  et d'un point ORP' de cet alignement, on implante une courbe  $C'$  de même courbure que  $C$  (ou plutôt de courbure opposée pour respecter l'orientation) qui commence avec un point FRP'. Il existe maintenant un déplacement du plan et un seul qui transforme  $C'$  en  $C$  et FRP' en FRP. Il est clair que ce déplacement transforme  $A'$  en l'alignement  $A$  cherché. Notre problème a une solution unique.

**Implantation d'un alignement entre deux courbes.** Comme dans la section 4.1, nous allons procéder par analyse et synthèse.

Commençons (problème préliminaire) par implanter sur  $C1$  une tangente  $A1$ , à partir d'un point arbitraire  $P1$  de ce cercle; notons  $Q1$  le contact entre le raccord et  $A1$  et soit  $CC1$  le cercle concentrique à  $C1$  et tangent à  $A1$ . De même sur  $C2$  on implante une tangente  $A2$  d'origine  $Q2$  à partir d'un point arbitraire  $P2$ , et on note  $CC2$  le cercle concentrique à  $C2$  et tangent à  $A2$  (voir figure 9).

**Analyse.** Si on considère une solution  $A$  du problème, la rotation centrée au centre de  $C1$  qui transforme  $P1$  en ORP1 transforme  $A1$  en  $A$  et conserve le cercle  $CC1$ . Il s'ensuit que  $A$  est une droite tangente au cercle  $CC1$ .

De même,  $A$  est tangente à  $CC2$ . La droite  $A$  est donc une tangente commune aux cercles  $CC1$  et  $CC2$ .

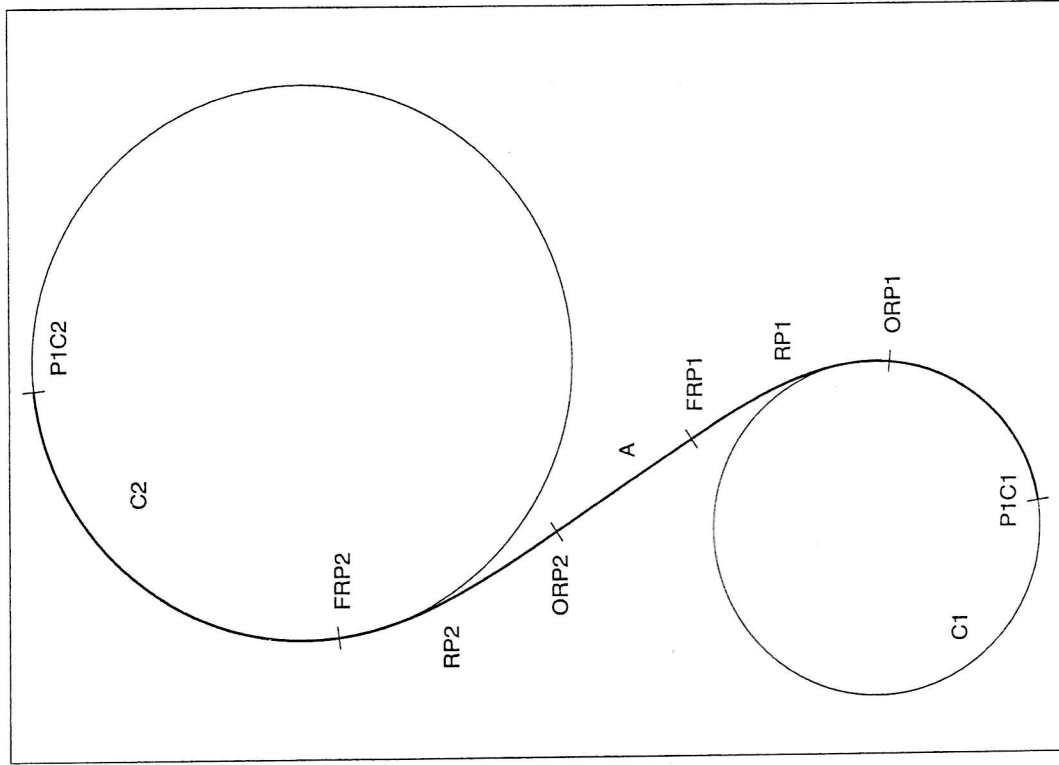


FIG. 8 - Raccordement de deux courbes

Plus précisément, en tenant compte des orientations, c'est une tangente commune extérieure si les courbures de C1 et C2 sont de même signe, et une tangente commune intérieure si les courbures sont de signes contraires.

**Synthèse.** Construisons A comme tangente commune (extérieure ou intérieure selon les signes des courbures) aux cercles CC1 et CC2.

Il existe une rotation centrée au centre de C1 qui transforme A1 en A; cette rotation transforme P1 en un point ORP1 et Q1 en un point FRP1 de A, ce qui raccorde C1 à A. De même on raccorde C2 à A par une rotation centrée au centre de C2.

**Discussion.** Le problème est possible à condition que les deux cercles CC1 et CC2 aient les tangentes communes voulues. C'est habituellement le cas quand les données rendent la solution plausible sur le terrain.

D'un point de vue théorique, le problème de la construction des tangentes communes (extérieures ou intérieures) à deux cercles se ramène à celui de l'intersection de deux cercles : c'est un problème du second degré, ce qui appelle deux remarques :

- il y a deux solutions entre lesquelles il faut choisir; ce choix est une question de bon sens, car dans la pratique, seul un arc relativement réduit de chaque cercle est concerné;
- le fait que la nature profonde du problème est le second degré avait apparemment échappé à l'auteur du programme d'origine, car celui-ci fonctionnait par approximations successives!

## 5 Annexe : liste des programmes

Cette annexe donne la liste des programmes de l'ancien logiciel. Il n'y a pas de problème 1 (correspondant sans doute à l'implantation d'un faisceau de votes) ni de problème 18 (un calcul d'aire...) et l'ordre n'est pas le plus naturel possible : certains utilitaires viennent après un programme qui les utilise, mais peu importe.

**2.— Changement d'axe.** Changement de repères des coordonnées d'un point P donné connaissant les coordonnées des deux points (0, 0) et (1, 0) du nouveau repère dans l'ancien repère.

Connaissant les coordonnées de P dans l'un des repères, le programme les calcule dans l'autre.

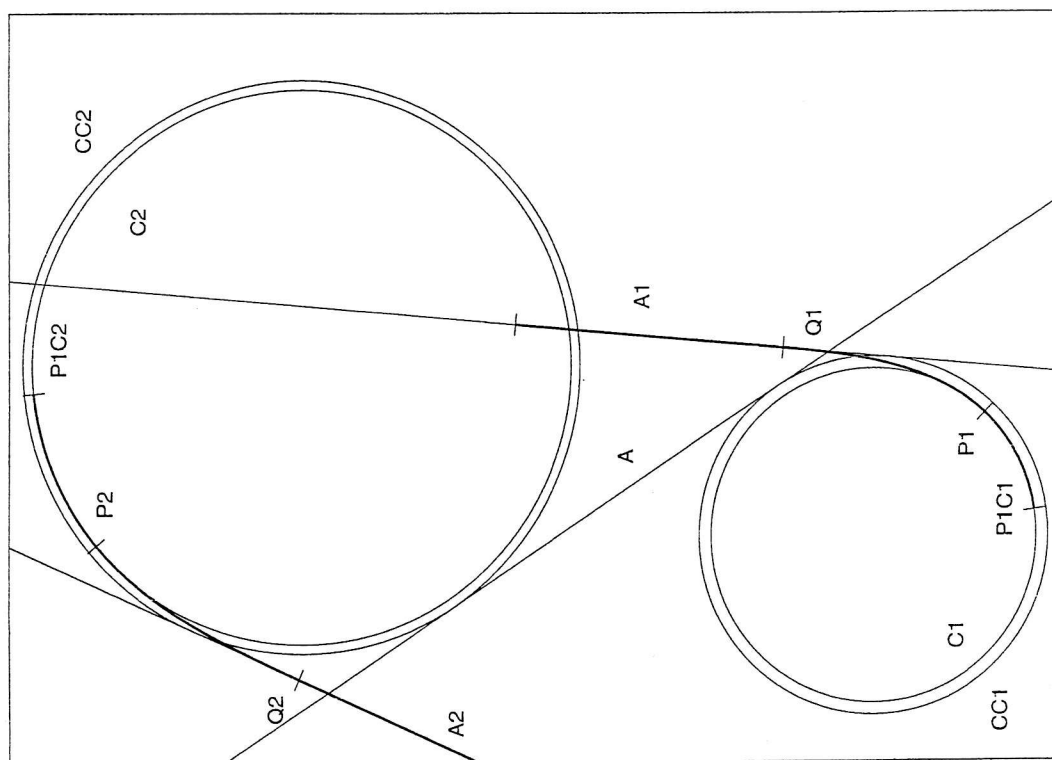


FIG. 9 - Raccordement de deux courbes : résolution