# Untersuchungen über Fouriersche Reihen.

Von

LEOPOLD FEJÉR aus Budapest.

## Einleitung.

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Variabelen $x$ mit der Periode $2\pi$, welche überall stetig ist. Bekanntlich glaubte Dirichlet und wahrscheinlich auch noch Riemann, daß die zu $f(x)$ gehörige Fouriersche Reihe

$$(1') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha\right]$$

überall konvergent sei. Du Bois-Reymond zeigte, daß dies nicht der Fall ist, indem er eine überall stetige Funktion konstruierte, deren Fouriersche Reihe an überall dicht liegenden Stellen divergiert. Es bleibe nun dahingestellt, ob es stetige Funktionen gibt, deren Fouriersche Reihe für jedes $x$ divergiert*) — jedenfalls können wir sagen: aus der bloßen Stetigkeit der Funktion an einer Stelle $x$ folgt die Konvergenz der Fourierschen Reihe an dieser Stelle noch nicht. Es müssen vielmehr noch für den Modus der Stetigkeit — wenn uns dieser Ausdruck gestattet ist — gewisse Beschränkungen hinzugezogen werden**), damit die Konvergenz der Reihe gesichert ist.

Indem wir aber die in der Literatur etwas zu ausführlich behandelte Frage nach den hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz der Fourierschen Reihe fallen lassen — wenden wir uns zur Fourierschen Reihe mit einer Fragestellung, die der Borel-Mittag-Lefflerschen in Bezug auf die Potenzreihe komplexen Argumentes vollkommen entspricht und folgendermaßen lautet:

*) Wie es z. B. stetige Funktionen gibt, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten haben.

**) Wir denken an die bekannten Beschränkungen von Dirichlet, Lipschitz, Jordan u. s. w.

Ist es möglich aus der zur stetigen Funktion $f(x)$ gehörigen Fourierschen Reihe, b. w. aus der mit ihr äquivalenten Funktionsfolge

$$s_0(x),\ s_1(x),\ \cdots,\ s_n(x),\ \cdots \tag{1}$$

wo

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha \cos\nu(\alpha - x)\,d\alpha\right\},$$

eine andere Funktionsfolge abzuleiten, welche aber für ein beliebiges $x$ konvergiert, und zwar zu $f(x)$ als Grenzfunktion? Dies ist in der Tat möglich. Man gehe einfach von der Folge (1) zur Folge der arithmetischen Mittel über

$$s_0(x),\ \frac{s_0(x)+s_1(x)}{2},\ \cdots,\ \frac{s_0(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n},\ \cdots \tag{2}$$

so besitzt diese neue Funktionsfolge, welche ebenso aus endlichen trigonometrischen Reihen besteht wie die Folge (1), die verlangte Eigenschaft. Es zeigt sich auch, daß die Folge (2) in jedem Intervalle gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, während die Folge (1) — wenn sie auch für jedes $x$ konvergiert — nicht gleichmäßig zu konvergieren braucht.

Wenn weiter die — noch immer stetige — Funktion $f(x)$ an einer Stelle $a$ des Intervalles $(0, 2\pi)$ integrabel unendlich wird, so ist die Folge der Partialsummen (1) im allgemeinen wieder divergent*). Es müssen auch hier gewisse — den Modus der Integrirbarkeit an der Stelle $a$ beschränkende Bedingungen hinzugezogen werden**), damit die Konvergenz der Folge (1) an einer Stelle $x$ ($x \gtrless a$) gesichert ist. Es zeigt sich, daß die Konvergenz der Folge (2) durch das Auftreten einer Stelle $a$, wo $f(x)$ beliebig integrabel unendlich wird, ungestört bleibt.

Nehmen wir weiter eine Funktion $f(x)$, die an einer Stelle $a$ eine Unstetigkeit erster Art besitzt und sonst z. B. beliebig oft differenzierbar ist. Bekanntlich ist dann die aus der Fourierschen Reihe von $f(x)$ durch gliedweise Differentiation gewonnene trigonometrische Reihe für jedes $x$ divergent. Wenn wir aber für diese Reihe die betreffenden arithmetischen Mittel bilden, so erweisen sich diese als konvergent und geben als Grenzfunktion die Ableitung $f'(x)$.

Indem wir die Aufzählung der Sätze unterbrechen, erwähnen wir bloß, daß sie viele Anwendungen gestatten, welche sich auf die Theorie der konvergenten Fourierschen Reihen und mit ihr zusammenhängenden Fragen beziehen.

---

*) Auch wenn z. B. $f(x)$ in den Intervallen $(0, a-\varepsilon)$ und $(a+\varepsilon, 2\pi)$ — $\varepsilon > 0$ — den einfachen Dirichletschen Bedingungen genügt.

**) Wir denken an die Bedingungen von Dirichlet, Du Bois Reymond, Harnack usw.

Unsere Untersuchungen lassen überhaupt die Theorie der konvergenten Fourierschen Reihe in neuem Lichte erscheinen — wie denn überhaupt das Studium der Divergenz einer Funktionenreihe ein tieferes Eindringen in die Natur der Reihe gestattet, eine Tatsache die schon allein der Theorie der divergenten Reihen eine Existenzberechtigung gibt*).

Inhaltsverzeichnis:



## § 1.

## Konvergenz der arithmetischen Mittel der Fourierschen Partialsummen.

Es sei $f(x)$ eine Funktion, deren absoluter Betrag im Intervalle von 0 bis $2\pi$ eine endliche obere Grenze besitzt. Eine weitere, von der Natur der Sache geforderte Beschränkung sei die, daß sie integrabel ist. Wenn nun $x$ eine Stelle bezeichnet, wo $f(x)$ entweder stetig ist, oder eine Diskontinuität von der ersten Art besitzt, so soll bewiesen werden, daß *die unter* (2) *stehende Folge der arithmetischen Mittel konvergiert*, und zwar *zu* $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ *als Grenzwert.*

Wir schicken voraus, daß die Reihe

$$\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta+\cdots$$

selbst zu den divergenten Reihen der betrachteten einfachen Natur gehört. Es ist nämlich

$$\sigma_{n-1}=\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta=\frac{1}{2}\,\frac{\cos(n-1)\vartheta-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}$$

folglich

$$\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}=\frac{1}{2n}\,\frac{1-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}=\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2. \tag{3}$$

Wenn also $\vartheta \gtrless 2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$, so ist

$$\lim\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}=0 \tag{3'}$$

*) Diese Arbeit ist — von einigen Modifikationen abgesehen — in der ungarischen Zeitschrift: „Mathematikai és Physikai Lapok“ (1902) erschienen; kurze Notizen über denselben Gegenstand sind in den Comptes Rendus (1900, 10 décembre und 1902, 7 avril) publiziert.

und es existiert also ein ganz bestimmter Grenzwert. — Wenn wir nun der Kürze halber

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} = S_n(x)$$

setzen, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Formel (3)

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{\sin n\frac{\alpha - x}{2}}{\sin\frac{\alpha - x}{2}}\right)^2 d\alpha$$

oder mit Benützung einer Integrationsvariabeln

$$\beta = \frac{\alpha - x}{2}$$

$$(4) \qquad S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} f(x + 2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta.$$

Während man also in der Theorie der konvergenten Fourierschen Reihen den Grenzwert des Dirichletschen Integrals

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} f(x + 2\beta)\frac{\sin(2n-1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

untersucht, so haben wir hier den Grenzwert des Integrals $S_n(x)$ unter (4) zu bestimmen. Von diesen beiden Integralen hat $S_n(x)$ den einfacheren Charakter. Während nämlich im Dirichletschen Integrale neben $f$ der Faktor $\frac{\sin(2n-1)\beta}{\sin\beta}$ steht — bei dem die Anzahl der Zeichenwechsel mit $n$ unbegrenzt wächst — tritt im Integrale $S_n(x)$ neben $f$ der niemals negative Faktor $\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2$ auf. Diesem Umstande ist es zu verdanken, daß man bei der Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{n=\infty} S_n(x)$ im wesentlichen mit dem ersten Integralmittelwertsatze auskommen kann, während die Grenzwertbestimmung $\lim\limits_{n=\infty} s_n(x)$ die Anwendung des tiefer liegenden zweiten benötigt.

Nehmen wir an daß $0 < x < 2\pi$. Es genügt offenbar den Grenz wert des Integrals

$$(5) \qquad J_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^a \varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta$$

zu untersuchen, wo $\varphi(\beta)$ eine an der Stelle 0 von rechts stetige Funktion bedeutet und $0 < a < \pi$.

Nach Voraussetzung läßt sich zu einer beliebigen positiven Größe $\delta$ eine Größe $\varepsilon$ bestimmen, so daß

$$|\varphi(h) - \varphi(+0)| < \delta$$

wenn

$$0 < h \leqq \varepsilon \leqq \pi - a.$$

Dann zerlegen wir in üblicher Weise

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon} \varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta + \frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon}^{a} \varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta \\ &= \qquad i_n \qquad + \qquad i_n' \end{aligned}$$

Besteht nun

$$|\varphi(\beta)| < M$$

wenn

$$0 \leqq \beta \leqq a,$$

so ist

$$|i_n'| < \frac{M}{n\sin^2\varepsilon}$$

und mit Benützung des ersten Integralmittelwertsatzes:

$$i_n = (\varphi(+0) + \eta)\,\frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta,$$

wo

$$|\eta| < \delta.$$

Nun hat man weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta - \frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta \\ &= \qquad j_n \qquad - \qquad j_n' \end{aligned}$$

Hier ist

$$|j_n'| < \frac{1}{n\sin^2\varepsilon}$$

und infolge der Identität (3)

$$j_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = \frac{1}{2}\cdot$$

Folglich erhält man

$$J_n = (\varphi(+0) + \eta)\left(\frac{1}{2} - j_n'\right) + i_n'$$

und also

$$\left|J_n - \frac{\varphi(+0)}{2}\right| < \delta,$$

wenn nur $n$ gehörig groß ist.

Wir können damit den Satz

$$\lim_{n=\infty} . S_n(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$$

als allgemein bewiesen betrachten, da im Falle $x = 0$ die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} . S_n(0) = \frac{1}{2}\{f(+0) + f(2\pi - 0)\}$$

sich in analoger Weise leicht ergibt*). —

Wir lassen nun die Beschränkung der Endlichkeit der Funktion $f(x)$ fallen und behandeln auch den Fall, wo sie unendlich wird, da wir glauben, daß dieser auch einiges Interesse darbietet. — Wir nehmen an, daß $f(x)$ *an einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles* $(0, 2\pi)$ *unendlich wird, unterwerfen sie aber außer der Integrierbarkeit* — die doch immer durch die Natur der Fragestellung gefordert ist — *keiner weitern Beschränkung.* Während das Auftreten solcher Unendlichkeitsstellen die Konvergenz der Fourierschen Reihe für ein *beliebiges* $x$ zerstören kann**), *bleiben die arithmetischen Mittel* $S_n(x)$ — und das soll eben jetzt bewiesen werden — *konvergent, so daß also wieder*

$$\lim . S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

*ist,* an jeder Stelle $x$, wo $f(x+0)$, $f(x-0)$ beide existieren.

Das hängt mit folgendem Satze zusammen:

*Ist* $f(x)$ *in einem Intervalle* $(a, b)$ *integrabel und mit Ausnahme einer einzigen Stelle* $c$ *des Intervalles endlich, so ist****)

$$\lim_{n=\infty} . \frac{1}{n}\int_a^b f(\alpha) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n\alpha)\, d\alpha = 0.$$

---

*) Auch im Falle daß die Funktion sich an der Stelle $x$ beliebig verhält, läßt sich über das Schwanken der $S_n(x)$ etwas aussagen. Ist nämlich $M(x)$ die Größte, $m(x)$ die Kleinste unter den vier Unbestimmtheitsgrenzen der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x$, so ist

$$m(x) \leqq \lim_{n=\infty} . \inf. S_n(x) \leqq \lim_{n=\infty} . \sup. S_n(x) \leqq M(x).$$

Etwas Analoges findet bei den Fourierschen $s_n(x)$ nicht statt.

**) Riemann: Habilitationsschrift. Ges. Werke S. 246.

***) Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines bekannten Riemannschen Satzes, nach welchem schon $\lim_{n=\infty} . \int_a^b f(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha = 0$ ist, wenn $f(\alpha)$ im Intervalle $(a, b)$ eine endliche obere Grenze besitzt. Ist dies nicht der Fall, so kann das Integral mit wachsendem $n$ beliebig groß werden. (Riemann: Habilitationsschrift. Ges. Werke S. 246).

Es genügt offenbar zu zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_a^c f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0$$

ist. Nach Voraussetzung können wir zu einem beliebigen positiven $\delta$ eine positive Größe $\varepsilon$ finden, so daß

$$\left| \int_\sigma^\tau f(\alpha)\, d\alpha \right| < \delta, \tag{6}$$

wenn

$$c - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \tau < c.$$

Wir zerlegen dann:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \int_a^{c-\varepsilon} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha + \frac{1}{n} \int_{c-\varepsilon}^{c} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha \\ = \; & \qquad\qquad i_n \qquad\qquad + \qquad\qquad i_n' \end{aligned}$$

Ist nun

$$|f(x)| < \mathsf{M}$$

wenn

$$a \leqq x \leqq c - \varepsilon,$$

so besteht:

$$|i_n| < \frac{\mathsf{M}(c-a)}{n}.$$

Um $i_n'$ abzuschätzen, bezeichnen wir nacheinander mit

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \cdots, \; \alpha_{\nu-1}, \; \alpha_\nu$$

jene ungeraden Multipla von $\frac{\pi}{2n}$, welche in das Innere des Intervalles von $(c-\varepsilon)$ bis $c$ fallen, und zerlegen dieser Einteilung gemäß

$$n\, i_n' = \int_{c-\varepsilon}^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \cdots + \int_{\alpha_{\nu-1}}^{\alpha_\nu} + \int_{\alpha_\nu}^{c},$$

wo als gemeinsamer Integrand $f(\alpha) \sin n\alpha$ zu denken ist. Jedes dieser Teilintegrale hat einen absoluten Betrag der kleiner ist als $2\delta$. Denn es ist z. B.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \sin n\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\xi} f(\alpha)\, d\alpha + \sin n\alpha_2 \int_{\xi}^{\alpha_2} f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\alpha_1 < \xi < \alpha_2$$

infolge des zweiten Integralmittelwertsatzes, woraus die Behauptung schon folgt, wenn wir die Ungleichung (6) in Betracht nehmen*). Wir erhalten daher

$$n\,|i_n'| < (\nu+1)\,2\,\delta,$$

wo $\nu$ zwar mit $n$ ins Unendliche wächst aber dennoch immer die Ungleichung

$$(\nu+1)\,\frac{\pi}{n} \leqq c-(c-\varepsilon)=\varepsilon$$

besteht. Folglich ist

$$|i_n'| < \frac{2\,\varepsilon}{\pi}\,\delta$$

und

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_a^c f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\right| < \frac{\mathsf{M}(c-a)}{n}+\frac{2\,\varepsilon}{\pi}\,\delta$$

und

$$< \frac{4\,\varepsilon}{\pi}\,\delta$$

wenn $n$ gehörig groß ist.

Damit ist aber der Hilfsatz schon bewiesen.

Ganz ähnlich kann man zeigen — und das ist eigentlich der Satz, den wir sogleich gebrauchen werden — daß *unter den nämlichen Voraussetzungen auch*

$$\lim.\;\frac{1}{n}\int\limits_a^b f(\alpha)\sin^2 n\alpha\,d\alpha=0$$

*ist.* —

Betrachten wir nun wieder das Integral (5) aber unter der Annahme, daß $\varphi(\beta)$ *an einer Stelle c des Intervalles beliebig integrabel unendlich wird.* Wenn wir zeigen können daß

$$\lim_{n=\infty}.\;\frac{1}{n\pi}\int\limits_\varepsilon^a \frac{\varphi(\beta)}{\sin^2\beta}\sin^2 n\beta\,d\beta=0, \tag{7}$$

wo

$$0<\varepsilon<c<a<\pi,$$

so können alle übrigen Schlußfolgerungen beibehalten werden. Die unter (7) ausgesprochene Behauptung ist aber eine direkte Folge des eben bewiesenen Hilfsatzes, so daß wir also zusammenfassend sagen können:

---

*) Der letzte Teil $\int\limits_{\alpha_\nu}^{c}$ bietet wegen

$$\int\limits_{\alpha_\nu}^{c}=\lim_{\varrho=0}.\int\limits_{\alpha_\nu}^{c-\varrho}$$

keine besondere Schwierigkeit.

Hauptsatz: *Ist $f(x)$ eine im Intervalle von 0 bis $2\pi$ integrable Funktion, die nur an einer endlichen Anzahl von Stellen dieses Intervalles unendlich wird, so konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel $S_n(x)$ an jeder Stelle $x$, wo $f(x)$ stetig ist, oder eine Diskontinuität von der ersten Art besitzt, und zwar zu $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ als Grenzwert.*

Um für $f(x)$ eine an den in Betracht kommenden Stellen *konvergente Reihenentwickelung* zu bekommen, bilden wir, in üblicher Weise:

$$S_1+\sum_{n=2}^{\infty}(S_n-S_{n-1}). \tag{8}$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß

$$S_n-S_{n-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\cos(\alpha-x)+2\cos 2(\alpha-x)+\cdots+(n-1)\cos(n-1)(\alpha-x)}{n(n-1)}\,d\alpha.$$

Wenn wir daher die Funktionen

$$c_n(\xi)=\frac{\cos\xi+2\cos 2\xi+\cdots+(n-1)\cos(n-1)\xi}{n(n-1)},$$

$$(n=2,3,\cdots,\infty)$$

einführen, so erhält die Reihe (8) die Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,c_n(\alpha-x)\,d\alpha\right\} \tag{2'}$$

eine zur Fourierschen vollkommen ähnliche Reihenentwickelung. Dabei entspricht die Funktion $c_n(\xi)$ in der Entwickelung (2′) der Funktion $\cos n\xi$ in der Fourierschen Entwickelung (1′). Die Funktionen $c_n(\xi)$ und $\cos n\xi$ haben in der Tat wichtige Eigenschaften gemeinsam. $c_n(\xi)$ ist nach $2\pi$ periodisch, bleibt dem absoluten Betrage nach $<1$ für jedes reelle $\xi$, hat eine ähnliche Wurzelverteilung wie $\cos n\xi$, und auch ihre Potenzreihenentwickelungen können in einfache Beziehung gesetzt werden. Während nämlich

$$\cos n\xi=1-\frac{n^2}{2!}\xi^2+\frac{n^4}{4!}\xi^4-\cdots$$

ist, so erhält man

$$c_n(\xi)=1-\frac{\psi_2(n)}{2!}\xi^2+\frac{\psi_4(n)}{4!}\xi^4+\cdots$$

Hier ist

$$\psi_{2k}=\frac{\varphi_{2k+1}(n)}{n(n-1)},$$

wo $\varphi_{2k+1}(n)$ das $(2k+1)^{te}$ Bernoullische Polynom bedeutet. $\psi_{2k}(n)$ ist also eine ganze rationale Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades in $n$, welche der Potenz $n^{2k}$ in der Entwickelung von $\cos n\xi$ entspricht.

Ist $f(x)$ überall stetig, so konvergiert die Folge (2) der $S_n(x)$ (oder die Reihe (2')) überall, und zwar gleichmäßig. Genauer formuliert:

Zusatz zum Hauptsatze: *Ist die den Bedingungen des Hauptsatzes genügende Funktion $f(x)$ in einem Intervalle $(b, c)$ $(0 \leqq b < c \leqq 2\pi)$ ausnahmslos stetig, so konvergieren die $S_n(x)$ in jedem Intervalle $(b_1, c_1)$ $(b < b_1 < c_1 < c)$ gleichmäßig zur Grenzfunktion $f(x)$.*

Unsere Beweisführungen lassen dies sofort erkennen, wenn man noch die Tatsache hinzunimmt, daß die Stetigkeit einer Funktion in einem Intervalle ihre gleichmäßige Stetigkeit nach sich zieht.

Es ist überhaupt bemerkenswert, wie die Approximationskurven $S_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ sich so zu sagen von Beginn an der beliebigen integrablen aber endlichen Funktion anpassen. Es ist nämlich

$$S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} f(x+2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Sind nun $M$ und $m$ die Weierstraßsche obere resp. untere Grenze der Funktion $f(x)$ für das Intervall $(0, 2\pi)$, so ergibt sich, da doch

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = 1$$

die Ungleichheit

$$m \leqq S_n(x) \leqq M$$

für

$$0 \leqq x \leqq 2\pi \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

d. h. *keine der Approximationsfunktionen $S_n(x)$ nimmt einen größeren Wert an als $f(x)$, und keine einen kleinern Wert als $f(x)$* — eine Eigenschaft die den Fourierschen $s_n(x)$ auch schon bei sehr einfachen $f(x)$ nicht zukommt. Hingegen bleibt jene Eigenschaft der Fourierschen Annäherungskurven, daß je zwei, $s_k(x)$ und $s_l(x)$ sich unbedingt schneiden und daß jede von ihnen die (stetige) Grenzkurve $f(x)$ schneidet — auch für die Kurven $S_n(x)$ erhalten, denn es ist*)

$$\int_0^{2\pi}(S_k(x) - S_l(x))\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} S_k(x) - f(x)\,dx = 0$$

für

$$k, l = 1, 2, 3, \cdots$$

*) Figuren zur Illustration der Annäherungsart der $s_n(x)$ findet man z. B. in dem Buche von Byerly: An elementary treatise on Fourier's series, p. 63, 64.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß die Betrachtung der arithmetischen Mittel auch bei einer andern wichtigen Frage der Theorie der Fourierschen Reihen von Nutzen ist.

Nehmen wir die Funktion $\frac{\pi - x}{2}$. Ihre — für das Intervall $(0, 2\pi)$ bezügliche Fouriersche Entwickelung lautet:

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots. \tag{9}$$

Die Funktion hat den Differentialquotienten $-\frac{1}{2}$, während die gliedweise Differentiation die total divergente trigonometrische Reihe

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots \tag{10}$$

liefert*). Wir sahen aber schon daß die arithmetischen Mittel der Reihe (10) wirklich konvergieren, und zwar zu $-\frac{1}{2}$ als Grenzwert**).

Diese spezielle Bemerkung läßt sich zu folgendem allgemeinen Satze erheben:

*Ist $f(x)$ eine Funktion, welche, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen $a_r$ des Intervalles $(0, 2\pi)$, an welchen sie einen einfachen Sprung erleidet***), überall stetig ist, und eine stetige Ableitung $f'(x)$ besitzt, so ist die aus der Fourierschen Reihe von $f(x)$*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

*durch gliedweise Differentiation erhaltene Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

*bekanntlich für jedes $x$ divergent — während die arithmetischen Mittel dieser Reihe eine — von den Stellen $a_r$ abgesehen — überall konvergente Folge bilden, die als Grenzfunktion die Ableitung $f'(x)$ besitzt.*

Es genügt den Satz für eine Funktion $f(x)$ zu beweisen, die nur eine einzige Sprungstelle $a$ $(0 < a < 2\pi)$ besitzt.

Da die Ableitung $f'(x)$ stetig ist, so konvergieren die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihe

---

*) Die Reihe (9) ist im wesentlichen das klassische Beispiel von Abel, welches zum ersten Male bei der gliedweisen Differentiation einer unendlichen Reihe zur Vorsicht mahnte.

**) S. Gleichung (3'). Die Stellen $0, \pm 2\pi, \cdots$ sind natürlich wieder ausgenommen.

***) Ist $f(+0) \neq f(2\pi - 0)$, so rechnen wir die Stelle $0$ (oder $2\pi$) auch zu den $a_r$-s.

$$(11)\qquad a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)$$

gewiß zu $f'(x)$ (von der Stelle $a$ abgesehen). Wenn wir nun den Sprung $f(a-0) - f(a+0) = D_a$ setzen, so erhält man durch Zerlegung und partielle Integration

$$a_0' = \frac{D_a}{2\pi} \qquad \left.\begin{aligned} a_n' &= \frac{D_a}{\pi} \cos na + nb_n \\ b_n' &= \frac{D_a}{\pi} \sin na - na_n \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \cdots$$

und die Reihe (11) erscheint in folgender Form:

$$\frac{D_a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{D_a}{\pi} \cos n(a-x) + (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \right\}.$$

Der Teil

$$\frac{D_a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(a-x) \right\}$$

kann aber weggelassen werden, da doch die arithmetischen Mittel dieser Reihe für jedes $x$ zu 0 konvergieren, die Stellen $a + 2k\pi$ ausgenommen, die uns aber ohnedies nicht interessieren*). Folglich konvergieren schon allein die arithmetischen Mittel von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

zu $f'(x)$ w. z. b. w.

Die Konvergenz ist wieder eine gleichmäßige in jedem Intervalle, das von Sprungstellen frei ist.

## § 2.

## Hülfsatz.

Bevor wir zu den Anwendungen übergehen, schicken wir einen allgemeinen Grenzwertsatz voraus, der auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein dürfte.

*Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *eine divergente Reihe, welche aber nach der Ausdrucksweise des Herrn Cesàro**), „einfach unbestimmt" ist, d. h. eine Reihe für welche der Grenzwert*

---

*) S. Gleichung (3').

**) Bulletin de Darboux: 1890, p. 114.

(12) $$\lim. S_n = S,$$

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \qquad s_n = \sum_{n=0}^{n} u_n$$

*existiert. Es sei ferner $\varphi(t)$ eine Funktion*), welche folgenden Bedingungen genügt*

(13) $$|\varphi(t)| < \frac{\mathsf{M}}{t^{2+\varrho}}, \qquad \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| < \frac{\mathsf{M}}{t^{2+\varrho}},$$

*wenn $t$ positiv ist und $> 1$. $\mathsf{M}$ und $\varrho$ bedeuten hier positive Konstanten. Dann ist die Reihe*

(14) $$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi(nt)$$

*für jedes positive $t$ konvergent, und — wenn $\varphi(0) = 1$ —*

$$\lim_{t=+0}. F(t) = S.$$

Beweis. Die Reihe (14) ist in der Tat für jedes positive $t$ konvergent; denn aus (12) folgt leicht, daß $\lim\limits_{n=\infty}. \frac{u_n}{n} = 1$ ist, und also mit Berücksichtigung von (13) die Vergleichbarkeit mit der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Da

$$u_n = (n+1)S_n - 2nS_{n-1} + (n-1)S_{n-2} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$
$$(S_{-2} = S_{-1} = 0),$$

folglich

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)S_n - 2nS_{n-1} + (n-1)S_{n-2}\}\varphi(nt)$$

oder nach den $S_n$ ordnend**)

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)S_n \left\{\varphi(nt) - 2\varphi\left(\overline{n+1}\,t\right) + \varphi\left(\overline{n+2}\,t\right)\right\}.$$

Setzen wir

$$S_n = S + \varepsilon_n \qquad (\lim_{n=\infty}. \varepsilon_n = 0)$$

dann ergibt sich die Zerlegung

---

*) Bei den Anwendungen des Satzes wird sie eine ganze transcendente Funktion sein.

**) Dies ist infolge der Bedingung (13) gestattet.

$$F(t) = S + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varepsilon_n\left\{\varphi(nt) - 2\varphi(\overline{n+1}\,t) + \varphi(\overline{n+2}\,t)\right\} = S + R(t)$$

und wir behaupten also daß

$$\lim_{t=+0}. R(t) = 0.$$

Um dies zu zeigen, wählen wir eine von $t$ unabhängige ganze Zahl $\nu$, sodaß $|\varepsilon_n| < \delta$ wenn $n > \nu$, und eine andre ganze Zahl $N$, sodaß

(15) $$(N-1)t \leqq 1 < Nt$$

unter $\delta$ eine positive Größe verstehend. Wir zerlegen nun

$$R = \sum_{0}^{\nu} + \sum_{\nu+1}^{N} + \sum_{N+1}^{\infty} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Ist $t$ gehörig klein, so ist gewiß

$$|R_1| < \delta,$$

und es handelt sich im wesentlichen um die Abschätzung von $R_2$ und $R_3$. Dies gestaltet sich folgenderweise:

$$|R_2| < \delta \sum_{\nu+1}^{N}(n+1)\left|\varphi(nt) - 2\varphi(\overline{n+1}\,t) + \varphi(\overline{n+2}\,t)\right|$$

und da für jedes $n$ und $t$

$$\left|\varphi(nt) - 2\varphi(\overline{n+1}\,t) + \varphi(\overline{n+2}\,t)\right| < 2t^2\,|\varphi''(\xi)|,$$
$$nt < \xi < (n+2)t,$$

so erhalten wir

$$|R_2| < \delta\cdot 2t^2\mu \sum_{0}^{N}(n+1),$$

wo $\mu$ positiv ist und so gewählt, daß

$$|\varphi''(\xi)| < \mu \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

Mit Berücksichtigung von (15) erhalten wir endlich für $R_2$

$$|R_2| < \delta\cdot 2\cdot\frac{\mu}{(N-1)^2}\,\frac{(N+1)(N+2)}{2} < 6\mu\delta.$$

Für $R_3$ haben wir:

$$|R_3| < 2t^2\delta\sum_{N+1}^{\infty}(n+1)\,|\varphi''(\xi)|,$$

und da nach (13)

$$|\varphi''(\xi)| < \frac{\mathsf{M}}{\xi^{2+\varrho}} < \frac{\mathsf{M}}{n^{2+\varrho}\, t^{2+\varrho}}$$

und nach (15) $t > \frac{1}{N}$, so ist

$$|R_3| < 2\mathsf{M}\,\delta\left(N^\varrho \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^{2+\varrho}}\right),$$

und weil man bekanntlich eine positive Zahl $G$ finden kann, sodaß für jedes $N$

$$N^\varrho \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^{2+\varrho}} < G,$$

so erhalten wir schließlich

$$|R| < \delta + 6\mu\delta + 2\mathsf{M}G\delta$$

für gehörig kleines $t$ w. z. b. w.

Zusatz: *Sind die $u_n$ Funktionen eines Parameters $\vartheta$ und konvergieren die arithmetischen Mittel $S_n(\vartheta)$ gleichmäßig zu $S(\vartheta)$, so konvergiert auch* — wie leicht ersichtlich — *$F(t, \vartheta)$ für $t = +0$ gleichmäßig zu $S(\vartheta)$.*

Wir heben einige spezielle Fälle unseres Hülfssatzes hervor.

Die Funktion

$$\varphi(t) = e^{-t}$$

genügt den aufgestellten Bedingungen, folglich ist

$$\lim_{t=+0} \sum_{0}^{\infty} u_n e^{-nt} = S$$

oder $e^{-t} = r$ setzend

(16) $$\lim_{r=1-0} \sum_{0}^{\infty} u_n r^n = S$$

*ein bekannter Satz des* Herrn Frobenius*).

Wenn wir weiter

$$\varphi(t) = e^{-t^2}$$

nehmen, so erhalten wir einen *neuen Satz*

(17) $$\lim_{t=+0} \sum_{0}^{\infty} u_n e^{-n^2 t^2} = S$$

---

*) Crelle Journal Bd. 89, p. 262—264. Vgl. auch Hölder, Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, Math. Annalen Bd. 20, p. 535—549.

oder*) auch

$$\lim_{r=1-0} \sum_{0}^{\infty} u_n r^{n^2} = S$$

usw.

Zu allen diesen Sätzen läßt sich ein, dem obigen entsprechender *Zusatz* formulieren.

## § 3.

## Anwendungen.

Wir gehen jetzt zu einigen Anwendungen unsrer Untersuchungen über.

a) Es sei $f(\varphi)$ eine nach $2\pi$ periodische, überall stetige Funktion von $\varphi$ mit der Fourierschen Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Bilden wir die Reihe

$$(18) \qquad P(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n,$$

so ist diese für $r < 1$ konvergent und genügt der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Da nun nach unserm Hauptsatze die arithmetischen Mittel der Koeffizientenreihe der Potenzreihe (18) gleichmäßig zu $f(\varphi)$ konvergieren, so folgt — mit Benutzung des Satzes (16) und seinem Zusatze — daß $P(r, \varphi)$ *für* $r = 1 - 0$ *gleichmäßig zu* $f(\varphi)$ *konvergiert.* Es läßt sich also der sogenannte „Satz vom Poissonschen Integrale“ wirklich direkt durch

---

*) Um eine kleine Anwendung dieses Satzes zu geben, betrachten wir die Potenzreihe in $q$

$$\vartheta_4(v, q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v.$$

Hier ist die — im wesentlichen schon oft betrachtete — Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\pi v$$

für jedes $v$ $\left(\text{außer } v = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots\right)$ einfach unbestimmt und liefert den Grenzwert $S = 0$. Folglich ist $\lim_{q=1-0} \vartheta_4(v, q) = 0$. (Vergl. in Borels Leçons sur les séries divergentes $p \cdot 7$ den Beweis des Herrn Tannery.)

die ursprüngliche Reihenentwickelung (18) erweisen. Dies mag von historischem Interesse sein*).

Bilden wir weiter

$$\Theta(\tau, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) e^{-n^2\tau}, \tag{19}$$

so ist diese Reihe für $\tau > 0$ konvergent, genügt der Wärmeleitungsgleichung**)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2}$$

und *geht für* $r = +0$ *gleichmäßig in* $f(\varphi)$ *über.* Dies folgt mit Hülfe des Theorems (17) und seinem Zusatze.

b) *Der bekannte Weierstraßsche Satz über die Annäherung einer beliebigen stetigen Funktion durch endliche trigonometrische Reihen ist ein Korollarium unseres Hauptsatzes.* Man entwickele die stetige Funktion $f(x)$ in die Fouriersche Reihe, so haben die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ die verlangte Eigenschaft. Die Möglichkeit durch Polynome zu approximieren folgt dann schon bekanntlich sehr einfach***).

c) Folgende Anwendungen beziehen sich auf Fragen, die in der Theorie der *konvergenten* Fourierschen Reihen auftreten.

---

*) Vergl. H. A. Schwarz: Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 189.

**) Den Satz über die Reihe (18) hat zuerst Herr Schwarz bewiesen, und Herr Picard benützt die gleichmäßige Konvergenz zum Beweise des Weierstraßschen Satzes über die Approximation einer stetigen Funktion durch endliche trigonometrische Reihen.

Den tiefer liegenden Satz (19) hat Weierstraß bewiesen und benutzt den gleichmäßigen Übergang in $f(\varphi)$ eben zum Beweise seines gerade erwähnten Satzes. Wir sehen aber, daß eigentlich an der Spitze unser Hauptsatz zu stellen ist, denn aus ihm folgt am natürlichsten der Weierstraßsche Satz über die stetige Funktion, die Sätze (18), (19) usw. Vergl. in Picards Traité d'Analyse 2ième Edition Bd. I, p. 283—287, wo der Weierstraßsche Grundgedanke mit größter Klarheit hervorgehoben wird, und auch Poincaré: Propagation de la chaleur chap. V.

***) Durch die eben angegebene Weise läßt sich der Weierstraßsche Satz für eine stetige Funktion $f(x)$ beweisen, die in einem beliebigen *endlichen* Intervalle $(a, b)$ definiert ist. Ist $(-\infty, +\infty)$ das Definitionsintervall, so verfährt man folgenderweise: man bestimmt für jedes $n$ eine ganze rationale Funktion $P_n(x)$, sodaß

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n^2}$$

wenn $-n \leqq x \leqq n$. Die Reihe

$$P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$$

stellt dann die Funktion $f(x)$ dar, und ist in jedem endlichen Intervalle gleichmäßig (und absolut) konvergent.

Es sei $f(x)$ eine Funktion die den Bedingungen unsres Hauptsatzes genügt. Angenommen, daß die Fouriersche Reihe von $f(x)$ an einer Stelle, wo $f(x)$ stetig ist, konvergiert, stellt sie dort notwendigerweise den Funktionswert $f(x)$ dar? Bekanntlich ja, und wir zeigen dies folgenderweise: Vorausgesetzt daß die Fourierschen $s_n(x)$ nicht zu $f(x)$ konvergieren, so müßten auch die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ zu diesem von $f(x)$ verschiedenen Grenzwerte zustreben. Das steht mit unsrem Hauptsatze in Widerspruch. — Ebenso läßt sich zeigen, daß die $S_n(x)$ an einer Sprungstelle nur zu $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ konvergieren können. — Der Charakter der Divergenz der $s_n(x)$ kann an einer Stetigkeitsstelle $x$ nur ein oscillatorischer sein und $f(x)$ liegt notwendigerweise zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen der schwankenden $s_n(x)$. Analoges gilt für eine Sprungstelle.

d) Wir wollen einiges über die *Eindeutigkeitsfrage* bemerken. Nach dem Satze des Herrn Cantor folgt aus der Gleichung

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots = 0,$$

daß sämtliche Koeffizienten der linksstehenden trigonometrischen Reihe $= 0$ sind, wenn diese Reihe mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles $(0, 2\pi)$ konvergiert. Daß die *Konvergenz* hier wirklich tief benutzt wird, darin mag uns vielleicht folgende Bemerkung bestärken:

Wenn die arithmetischen Mittel einer trigonometrischen Reihe, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles $(0, 2\pi)$ überall zu 0 konvergieren, so folgt daraus das Verschwinden der Koeffizienten *nicht.* In der Tat die Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots$$

besitzt die erwähnte Eigenschaft (Gl. (3')) und hat nicht lauter verschwindende Koeffizienten. Ob nicht das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten folgt, wenn wir Ausnahmestellen ausschließen, bleibe noch dahingestellt. Jedenfalls *besteht* aber *folgender, dem bekannten Satze von* Riemann *vollständig analoger Satz:*

Es sei

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

eine trigonometrische Reihe die an einer Stelle $x$ einfach unbestimmt ist, und den Wert $f(x)$ liefert*). Eine viermalige gliedweise Integration ergibt die überall konvergente Reihe

*) Es sei ferner $|a_n| < n^2$, $|b_n| < n^2$ wenn $n$ eine gewisse Grenze überschreitet.

$$F(x) = C + C'x + C''x^2 + C'''x^3 + \frac{a_0 x^4}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4}$$

und der sogenannte mittlere vierte Differenzenquotient von $F(x)$ hat die Form:

$$\frac{\Delta_4(t)}{16t^4} = \frac{F(x+4t) - 4F(x+2t) + 6F(x) - 4F(x-2t) + F(x-4t)}{16t^4}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^4.$$

Es besteht nun:

$$\lim_{t=0} . \frac{\Delta_4(t)}{16t^4} = f(x).$$

Dies folgt aus unserem allgemeinen Grenzwertsatze, wenn wir

$$\varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4$$

nehmen.

Göttingen, im Januar 1903.