DLO

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NIVEAUX (ET FONCTIONS ASSOCIEES)

H est une constante réelle donnée strictement positive

U est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$ par les conditions

$|x| > 1 \Rightarrow U(x) = H \qquad |x| \leqslant 1 \Rightarrow U(x) = 0$

DEFINITION : On appelle NIVEAU tout nombre réel λ tel qu'il existe une fonction y, à valeurs réelles, dérivable d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $y'' - Uy = \lambda y$ et la condition : "l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ existe et égale 1".

REMARQUE 1 : La dernière des conditions citées équivaut à l'ensemble des conditions suivantes : $\int_{-\infty}^{-1} y^2(x)\,dx$ existe | $\int_{-1}^{+1} y^2(x)\,dx$ existe | $\int_{1}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ existe (la deuxième est d'ailleurs vérifiée d'emblée) et ces trois intégrales ont pour somme 1.

REMARQUE 2 ; Dès qu'il existe une fonction y telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ soit un nombre fini non nul (donc strictement positif), il suffit de multiplier cette fonction par un scalaire réel convenable (qui existe toujours) pour vérifier l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx = 1$.
Il n'est pas nécessaire de déterminer ce scalaire pour affirmer que λ est un niveau.
On peut le faire dès que l'on a la certitude que ($\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ existe) et que la fonction y n'est pas identiquement nulle.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

Dans cette partie préliminaire :

a, b sont des constantes réelles

ω est une constante réelle strictement positive

1) Pour $t > 1$ calculer $\int_1^t (a\,e^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx$

APPLICATION : trouver la condition d'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx$

2) Pour $t > 1$, calculer $\int_1^t (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx$

APPLICATION : trouver la condition d'existence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx$$

3) Trouver

a) la condition d'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx$

b) la condition d'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx$

I.- RECHERCHE DES NIVEAUX POSITIFS (EVENTUELS)

QUESTION : Existe-t-il des niveaux λ positifs ? Dans l'affirmative combien et lesquels ?

PLAN CONSEILLE : Poser $\alpha = \sqrt{\lambda}$ (> 0) $\beta = \sqrt{H + \lambda}$ (ainsi $\beta > \alpha > 0$).
calculer y(x) pour $x < -1$, pour $x \in]-1, +1[$, pour $x > 1$ en fonction de x et de constantes, traduire l'existence des intégrales $\int_{-\infty}^{-1} y^2(x)\,dx$, $\int_{-1}^{+\infty} y^2(x)\,dx$
(ce qui peut conduire à diminuer le nombre des constantes).
Traduire la condition de continuité de la fonction y en -1 et 1
et la condition de continuité de la fonction y' en -1 et 1.
Chercher si l'ensemble de ces conditions est compatible avec la suivante :
"la fonction y n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ ".

II.- O EST-IL UN NIVEAU ?

Répondre aux mêmes questions que dans la partie I lorsque $\lambda = 0$.
On pourra utiliser $\beta = \sqrt{H}$ (>0). On justifiera complètement (et soigneusement) la conclusion quelle qu'elle soit.

III.- (-H) EST-IL UN NIVEAU ?

Remplacer dans l'équation λ par $-H$, poser $\alpha = \sqrt{-\lambda} = \sqrt{H}$ (>0) et chercher une fonction associée y. On concluera et on justifiera complètement (et soigneusement) cette conclusion quelle qu'elle soit.

Tournez la page S. V. P.

IV.- RECHERCHE DES NIVEAUX $<-H$

Soit $\lambda < -H$. Répondre aux mêmes questions que dans la partie I. On pourra poser $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ $\beta = \sqrt{-H-\lambda}$. Ainsi $\alpha > \beta > 0$. On concluera et on justifiera la conclusion quelle qu'elle soit.

V.- ETUDE DES NIVEAUX $\in]-H, 0[$

Dans cette partie $-H < \lambda < 0$. On pose $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ (>0) $\beta = \sqrt{H+\lambda}$ (>0).

1) Calculer $y(x)$ en fonction de x, α, β, et d'autres constantes.

   a) pour $x < -1$ b) pour $-1 < x < 1$ c) pour $x > 1$

2) Traduire la continuité de y et de y' en -1 et $+1$. Calculer les constantes introduites dans 1°,a) et 1°,c) en fonction de α, β, et des constantes introduites dans 1°,b).

   Ces dernières peuvent-elles être simultanément nulles ?

3) Dans le cas envisagé où $\lambda \in]-H, 0[$ un niveau λ est dit de première catégorie si $\cos\alpha \sin\alpha > 0$. Soit λ un niveau de première catégorie et soit y une fonction associée.

   a) calculer β en fonction de α.

   b) trouver l'équation que doit vérifier α et démontrer que ce nombre α doit appartenir à un ensemble E, réunion d'un infinité d'intervalles ouverts I_k que l'on définira et que l'on numérotera à partir de 0.

   c) démontrer que les valeurs convenables de α sont les abscisses des points communs à une ligne L et à la réunion de deux droites Δ_1 , Δ_2. Trouver les équations de L (complétée par $x \in E$), Δ_1 , Δ_2 et les tracer sur un même graphique.

4) Un niveau λ est dit de deuxième catégorie si $\lambda \in]-H, 0[$ et si $\cos\alpha \sin\alpha \leqslant 0$.

   a) préciser si $\cos\alpha \sin\alpha$ peut être nul et calculer β en fonction de α.

   b) trouver l'équation que doit vérifier α et démontrer que ce nombre α doit appartenir à un ensemble F réunion d'une infinité d'intervalles ouverts J_k que l'on définira et que l'on numérotera à partir de 0.

   c) Démontrer que les nombres convenables sont les abcisses des points de $L' \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Tracer sur un même graphique les lignes L' (ne pas oublier $x \in F$) Δ_1 , Δ_2.

VI.- NOMBRE TOTAL DES NIVEAUX (EN FONCTION DE L'ENTIER n DEFINI PAR $n < \frac{2\sqrt{H}}{\pi} \leqslant n+1$

1) Dans cette question n est pair. On pose $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}$)

   a) trouver le nombre des niveaux λ ($\in]-H, 0[$) de première catégorie

   b) trouver le nombre des niveaux λ ($\in]-H, 0[$) de deuxième catégorie

   c) trouver le nombre total des niveaux λ répartis (éventuellement) dans toutes les catégories.

2) Dans cette question n est impair. On pose $n = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$)

   a) trouver le nombre des niveaux λ ($\in]-H, 0[$) de première catégorie

   b) trouver le nombre des niveaux λ ($\in]-H, 0[$) de deuxième catégorie

   c) trouver le nombre total des niveaux λ répartis (éventuellement) dans toutes les catégories.

3) Dans cette question n ($\in \mathbb{N}$) est quelconque. Trouver, en fonction de n le nombre total des niveaux.

VII.- ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : on pose $H = \frac{\pi^2}{8}$

1) Trouver le nombre total des niveaux et calculer chacun d'eux

2) Pour chacun des niveaux, déterminer la fonction y associée. On imposera (pour garantir l'unicité) $y(1) \geqslant 0$ et on calculera $y(x)$ dans chacun des cas suivants :

   $x < -1$ $-1 < x < 1$ $x > 1$