Oeuvres de Fourier. Tome 2 / publiées par les soins de M. Gaston Darboux, sous les auspices du ministère de [...]

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE

SUR LE

REFROIDISSEMENT SÉCULAIRE DU GLOBE TERRESTRE.

Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris, p. 58 à 70; avril 1820.

La question des températures terrestres est fort composée; nous ne pouvons ici qu'indiquer la nature de cette question, l'analyse qui sert à la résoudre, et les résultats remarquables que l'on en déduit.

La chaleur qui se distribue dans l'intérieur de la Terre est assujettie à trois mouvements distincts :

1° L'action des rayons du Soleil pénètre le globe, et cause des variations diurnes et annuelles dans les températures. Ces changements périodiques cessent d'être sensibles à quelque distance de la surface. Au delà d'une certaine profondeur, et jusqu'aux plus grandes distances accessibles, la température due à la seule influence du Soleil est devenue fixe; elle est la même pour les différents points d'une même verticale, et elle est égale à la valeur moyenne de la température dans les points de cette verticale sujets aux variations périodiques. Cette quantité immense de chaleur solaire qui détermine les variations annuelles oscille dans l'enveloppe extérieure de la Terre; elle passe au-dessous de la surface pendant une partie de l'année, et, pendant la saison opposée, elle remonte et se dissipe dans l'espace.

2° Si l'on fait abstraction de ce premier mouvement pour ne considérer que les températures fixes des lieux profonds, on reconnait que la température, qui est constante dans un lieu donné, diffère selon la situation de ces lieux par rapport à l'équateur. Plusieurs causes accessoires concourent à ces différences. Il résulte de l'inégalité des températures fixes que la chaleur solaire, qui s'est propagée depuis un grand nombre de siècles dans la masse intérieure du globe, y est assujettie à un mouvement très lent, devenu sensiblement uniforme. C'est en vertu de ce second mouvement que la chaleur du Soleil pénètre les climats équinoxiaux, s'avance dans l'intérieur du globe, en même temps s'éloigne du plan de l'équateur et se dissipe à travers les régions polaires.

3° Il ne suffit pas de considérer les effets du foyer extérieur, il faut aussi porter son attention sur le mouvement de la chaleur propre du globe. Si la température fixe des lieux profonds devient plus grande à mesure qu'on s'éloigne de la surface en suivant une ligne verticale, il est impossible d'attribuer cet accroissement à la chaleur du Soleil qui se serait accumulée depuis un très long temps. L'Analyse démontre que cette dernière supposition ne peut être admise. Or, des observations très variées établissent aujourd'hui ce fait général que les températures fixes croissent avec la profondeur. A la vérité, la mesure de l'accroissement demeure sujette à beaucoup d'incertitude; mais il n'en est pas de même du résultat principal, savoir : l'augmentation de la température avec la profondeur. MM. les rédacteurs des *Annales de Chimie et de Physique* viennent de publier les observations de ce genre qui nous paraissent propres à décider entièrement la question. Cela posé, on conclut avec certitude de la solution analytique que cet accroissement des températures est dû entièrement à une chaleur primitive que la Terre possédait à son origine, et qui se dissipe progressivement à travers la surface. Il faut donc, comme nous l'avons annoncé, distinguer trois mouvements de la chaleur dans la masse du globe terrestre :

Le premier est périodique et n'affecte que l'enveloppe; il consiste dans les oscillations de la chaleur solaire, et détermine les alternatives des saisons.

Le second mouvement se rapporte aussi à la chaleur du Soleil, et il est uniforme et d'une extrême lenteur; il consiste dans un flux continuel et toujours semblable à lui-même, qui traverse la masse entière du globe de l'un et de l'autre côté du plan de l'équateur jusqu'aux pôles.

Le troisième mouvement de la chaleur est variable, et il produit le refroidissement séculaire du globe. Cette chaleur qui se dissipe ainsi dans les espaces planétaires était propre à la Terre, et primitive; elle est due aux causes qui subsistaient à l'origine de cette planète; elle abandonne lentement les masses intérieures, qui conservent pendant un temps immense une température très élevée. Cette hypothèse d'une chaleur intérieure et centrale s'est renouvelée dans tous les âges de la Philosophie, car elle se présente d'elle-même à l'esprit comme la cause naturelle de plusieurs phénomènes. La question consistait à soumettre l'examen de cette opinion à une analyse exacte, fondée sur la connaissance des lois mathématiques de la propagation de la chaleur. C'est ce mouvement variable de la chaleur primitive du globe qui est l'objet principal du Mémoire dont nous donnons l'extrait; nous rapportons les titres des articles, pour indiquer l'ordre que l'on a suivi.

I. Exposé de la question. Équations différentielles de l'état variable d'une sphère dont la chaleur initiale se dissipe dans le vide.

II. Condition relative à la surface.

III. Solution générale, la température initiale étant exprimée par une fonction arbitraire.

IV. Application à la sphère dont tous les points ont reçu la même température initiale.

V. Températures variables dans un solide d'une profondeur infinie, dont l'état initial serait donné par une fonction arbitraire, et dont la surface serait maintenue à une température constante.

VI. Flux intérieur de la chaleur dans ce solide.

VII. Températures variables dans un solide d'une profondeur infinie, dont l'état initial serait exprimé par une fonction arbitraire, et dont la chaleur se dissipe librement à travers la surface dans un espace vide terminé par une enceinte d'une température constante.

VIII. Du cas où la chaleur initiale est la même jusqu'à une profondeur donnée. Température de la surface.

IX. Applications numériques.

X. Application de la solution relative à la sphère, et comparaison avec les températures variables du solide infiniment profond.

XI. Conséquences générales.

Pour citer un exemple de ce genre de questions, nous choisirons celle qui est indiquée dans le VII^e article.

On suppose un solide homogène, de dimensions infinies, terminé par un plan horizontal; tout l'espace inférieur au plan infini est occupé par la masse solide; l'espace supérieur est vide et terminé de tous côtés par une enceinte solide d'une figure quelconque et d'une température constante, que l'on désigne par zéro.

u exprime la profondeur verticale d'un point du solide, ou sa distance à la surface. La température initiale de la tranche solide dont la profondeur est u est donnée, et l'on représente cette température par $F(u)$. La fonction $F(u)$ est entièrement arbitraire et peut être discontinue. La substance dont le solide est formé est supposée connue, c'est-à-dire que l'on a mesuré : 1° la densité D; 2° la capacité de chaleur C; 3° la conducibilité propre K, ou la facilité avec laquelle la chaleur passe d'une molécule solide intérieure à une autre; 4° la conducibilité extérieure h, ou la facilité avec laquelle la chaleur passe d'une molécule de la surface dans le vide. Ces trois coefficients C, h, K sont spécifiques, comme celui qui mesure la densité; ils règlent dans toutes les substances l'action de la chaleur : on en a donné les définitions exactes dans les Mémoires précédents, et l'on a fait connaître divers moyens de les mesurer.

Cela posé, le solide ayant son état initial, on commence à compter le temps écoulé pendant que la chaleur du solide se dissipe progressivement dans le vide à travers la surface. Après un certain temps t, la tranche dont la profondeur est u, et qui avait la température initiale $F(u)$, a une température actuelle v qui varie avec le temps t et avec la profondeur u; la question consiste à trouver cette fonction v de u et de t qui exprime, pour chaque instant, l'état variable du solide pendant la durée infinie du refroidissement. Cette question exigeait une nouvelle méthode d'Analyse dont on a donné les premières applications en 1807; elle est complètement résolue par la formule suivante [1] :

$$(1)\quad v=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-p^2\frac{Kt}{CD}}}{p^2+\frac{h^2}{K^2}}\left(\frac{h}{K}\sin pu+p\cos pu\right)dp\int_0^{\infty}\left[\frac{h}{K}F(\alpha)-F'(\alpha)\right]\sin p\alpha\,d\alpha.$$

[1] Dans le passage qui se trouve reproduit à la page 117 de ce Volume, Fourier indique que les formules (1) et (2) du Mémoire actuel ont été inexactement transcrites et doivent être modifiées. Il nous semble cependant que la formule fondamentale (1) est exacte et qu'on peut la vérifier de la manière suivante :

1°. On a évidemment

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2},$$

puisque cette équation est vérifiée par chaque élément de l'intégrale.

2° On a, pour la même raison,

$$K\frac{\partial v}{\partial u}=hv\qquad\text{pour}\qquad u=0.$$

Il reste donc simplement à vérifier que l'expression de v se réduit à $F(u)$ pour $t=0$.

Faisons $t=0$; nous aurons, en changeant l'ordre des intégrations,

$$v=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{h}{K}F(\alpha)-F'(\alpha)\right]d\alpha\int_0^{\infty}\frac{\frac{h}{K}\sin pu+p\cos pu}{p^2+\frac{h^2}{K^2}}\sin p\alpha\,dp.$$

L'intégration par rapport à p peut toujours être effectuée. Il suffit d'employer les formules connues

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin bx\,dx}{k^2+x^2}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{-bk}, & b>0,\quad k>0,\\ -\frac{\pi}{2}e^{bk}, & b<0,\quad k>0;\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{k^2+x^2}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2k}e^{-bk}, & b>0,\quad k>0,\\ \frac{\pi}{2k}e^{bk}, & b<0,\quad k>0;\end{cases}$$

qui conduisent à la suivante

$$\int_0^{\infty}\frac{k\sin bx+x\cos bx}{k^2+x^2}\sin cx\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{k(b-c)}, & c>b,\\ 0, & c<b,\end{cases}$$

c, b, k étant des constantes *positives*. Par un simple changement de notations, cette der-

La fonction $F(\alpha)$ étant connue, on intègre d'abord par rapport à l'indéterminée α, entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \infty$. Le résultat de cette intégration est une fonction de p. On intègre ensuite, par rapport à l'indéterminée p, entre les limites $p = 0$ et $p = \infty$. Le résultat de cette intégration ne contient plus p, en sorte que l'on obtient pour v une fonction de u et des constantes D, C, h, K. L'analyse dont on déduit cette solution ne consiste pas seulement à exprimer les intégrales par la somme de plusieurs termes exponentiels. Cet usage de valeurs particulières était connu depuis l'origine du calcul des différences partielles. La méthode dont nous parlons consiste surtout à déterminer les fonctions arbitraires sous les signes d'intégrale définie, en sorte que le résultat de l'intégration soit une fonction quelconque, qui est donnée, et qui peut être discontinue.

On peut connaître aussi la quantité de chaleur qui, pendant un temps donné, traverse une des tranches du solide, et, en général, il n'y a aucun élément du phénomène qui ne soit clairement exprimé par la solution. Si l'on suppose que la température initiale a une même valeur b, depuis la surface jusqu'à une certaine profondeur A, et que, au

nière formule nous donne

$$\int_0^\infty \frac{\frac{h}{K}\sin pu + p\cos pu}{p^2 + \frac{h^2}{K^2}} \sin p\alpha \, dp = \begin{cases} 0, & \alpha < u, \\ \frac{\pi}{2} e^{\frac{h}{K}(u-\alpha)}, & \alpha > u. \end{cases}$$

En portant cette valeur dans l'expression de v, on obtient le résultat suivant :

$$v = \int_u^\infty \left[\frac{h}{K} F(\alpha) - F'(\alpha)\right] e^{\frac{h}{K}(u-\alpha)} d\alpha$$

ou

$$v = -e^{\frac{h}{K}u} \int_u^\infty d\left[e^{-\frac{h}{K}\alpha} F(\alpha)\right].$$

Si l'on suppose que la fonction

$$e^{-\frac{h}{K}\alpha} F(\alpha)$$

s'annule pour $\alpha = \infty$, il reste simplement

$$v = F(u).$$

G. D.

delà de cette profondeur, la température initiale est zéro, on trouve

$$(2)\qquad v = \frac{2bh}{K\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-p^2\frac{Kt}{CD}}}{p^2+\frac{h^2}{K^2}}\left(\frac{h}{K}\frac{\sin pu}{p}+\cos pu\right)\sin\operatorname{verse} p\mathrm{A}\,dp.$$

Si l'on suppose infinie la ligne dont tous les points ont la température initiale b, on trouve, par un examen très attentif,

$$(3)\qquad v = \frac{2bh}{K\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-p^2\frac{Kt}{CD}}}{p^2+\frac{h^2}{K^2}}\left(\frac{h}{K}\frac{\sin pu}{p}+\cos pu\right)dp.$$

Pour connaître l'état variable de la surface depuis le commencement du refroidissement, il faut supposer $u = 0$, et l'on a

$$(4)\qquad v = \frac{2bh}{K\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-p^2\frac{Kt}{CD}}}{p^2+\frac{h^2}{K^2}}\,dp.$$

Cette dernière expression équivaut à l'intégrale indéfinie

$$(5)\qquad v = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}e^{R^2}\int_R^\infty e^{-r^2}\,dr;$$

la valeur de la limite R est

$$R = \frac{h\sqrt{t}}{\sqrt{KCD}}.$$

Sous cette forme, la valeur de v est toute calculée au moyen de la seconde Table que M. Kramp a donnée dans son Ouvrage *Sur les réfractions astronomiques*. Lorsque la valeur de t est devenue assez grande, par exemple si elle surpasse mille années, et si la substance du solide est le fer, la température variable de la surface est exprimée sans erreur appréciable par la formule très simple

$$(6)\qquad v = \frac{b}{h}\sqrt{\frac{KCD}{\pi t}}.$$

Ainsi la température de la surface varie en raison inverse de la racine carrée des temps écoulés depuis le commencement du refroidissement. La valeur du temps t étant devenue beaucoup plus grande que mille années, c'est cette équation (6) qui exprime, en fonction de t et des constantes K, C, D, h, la température variable v de la surface du globe terrestre, pendant un nombre immense de siècles.

Si l'on compare le mouvement de la chaleur dans un solide d'une profondeur infinie à celui qui a lieu dans une sphère solide, d'un rayon très grand, comme celui de la Terre, on reconnaît que les deux effets doivent être les mêmes pendant un temps immense, et pour toutes les parties qui ne sont pas extrêmement éloignées de la surface. Il suit de là que les intégrales précédentes doivent aussi être données par les formules qui expriment le mouvement variable de la chaleur dans une sphère d'un rayon quelconque.

Dans cette dernière question, on désigne par X le rayon total, et par x le rayon d'une couche sphérique intérieure. La température initiale du solide est connue; elle est représentée par $F(x)$, et la fonction $F(x)$ est entièrement arbitraire; t désigne le temps écoulé à partir de cet état initial, et v est, après le temps écoulé t, la valeur actuelle de la température d'une couche sphérique dont le rayon est x. On suppose que la chaleur se dissipe librement à la surface dans un espace vide, que termine une enceinte solide dont la température constante est zéro. Les coefficients spécifiques D, C, h, K mesurent les quantités que nous avons déjà définies. Cela posé, les équations différentielles qui expriment le mouvement de la chaleur dans cette sphère sont

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{7}$$

et

$$K\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0. \tag{8}$$

Ces deux équations et l'intégrale (9) que nous allons rapporter ont été données, pour la première fois, dans un Mémoire remis à l'Institut de France, le 21 décembre 1807 (p. 143, 144 et 150). Il est nécessaire de fixer son attention sur l'équation (8), parce qu'elle contient un résultat très simple dans l'analyse des températures du globe. Cette équation se rapporte à l'état de la surface ; elle montre que l'élément v de la température de la surface au-dessus de la température zéro de l'espace vide a une relation nécessaire avec la valeur qui appartient, pour ce même instant, à $\frac{\partial v}{\partial x}\cdot$ On connaîtrait cette valeur de $\frac{\partial v}{\partial x}$ en observant, dans le même moment, la température v de la surface et la température $v + \Delta v$ d'un point inférieur placé à une profondeur médiocre Δx. Le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ est la mesure de l'accroissement de température, à partir de la surface. Or cet accroissement change avec la valeur de v, et, dans la question actuelle, il est sensiblement proportionnel à cette valeur, c'est-à-dire que le rapport de l'accroissement $\frac{\partial v}{\partial x}$ à la température de la surface est une quantité constante $\frac{h}{K}\cdot$

En général, le flux normal de la chaleur à la surface d'un corps, tel qu'il est déterminé par l'action mutuelle des molécules solides, équivaut à la chaleur qui se dissipe à la surface en vertu du rayonnement et de l'action du milieu extérieur. Nous avons montré, dans les Mémoires déjà cités de 1807 et de 1811, que cette relation est totalement indépendante de la figure du corps et des substances dont la masse intérieure est formée, ou de leurs températures. Le rapport constant dont il s'agit ne dépend que des deux qualités physiques de l'enveloppe qui ont été désignées par K et h.

Voici la formule qui contient la solution générale de la question précédente [1]

$$v = \frac{2}{x} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin p_i x \int_0^X \alpha \, F(\alpha) \sin p_i \alpha \, d\alpha}{X - \frac{1}{2p_i} \sin 2p_i X} e^{-\frac{K p_i^2 t}{CD}}. \tag{9}$$

La quantité désignée par p_i est une racine de l'équation transcendante

$$pX = \left(1 - \frac{h}{K} X\right) \operatorname{tang} pX. \tag{10}$$

[1] *Théorie de la chaleur*, p. 312 et 314. G. D.

Cette équation a toutes ses racines réelles, dont chacune doit être mise à la place de p_i dans l'expression de v. Ces racines, rangées par ordre en commençant par la plus petite, sont p_1, p_2, p_3, ... Le signe $\sum_{i=1}^{i=\infty}$ indique que l'on doit donner au nombre entier i toutes ses valeurs 1, 2, 3, ..., et prendre la somme des termes. L'indéterminée α, qui entre sous le signe d'intégrale, disparaît par l'intégration définie, qui a lieu depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = X$. On trouve ainsi pour v une fonction de x et de t, du rayon total X et des coefficients D, C, h, K. C'est sous cette forme que doit être mise l'intégrale des équations (7) et (8), pour représenter distinctement le phénomène physique qui est l'objet de la question. On peut connaître, au moyen de cette formule, toutes les circonstances du refroidissement d'un globe solide dont le diamètre n'est pas extrêmement grand.

Une des conséquences de cette solution consiste en ce que le mouvement de la chaleur dans l'intérieur du solide devient de plus en plus simple, à mesure que le temps augmente. Lorsque le refroidissement a duré pendant un certain temps que l'on peut déterminer, l'état variable du solide est exprimé sans erreur sensible par le premier terme de la valeur de v; alors toutes les températures décroissent en même temps et demeurent proportionnelles, en sorte que les rapports de ces températures variables sont devenus des nombres constants.

Nous avons reconnu, en effet, dans nos expériences, que cette disposition finale et régulière des températures s'établit, dans les corps de dimensions médiocres, après un temps assez court. Mais, pour une sphère solide d'un rayon comparable à celui de la Terre, les rapports des températures ne deviendraient fixes qu'après un temps immense, et l'on n'a aucun moyen de connaître si ce temps est écoulé. Pour découvrir les lois naturelles du refroidissement du globe, il était donc nécessaire de considérer les phénomènes pendant toute la durée de l'état qui précède cette distribution finale, durée qui doit surpasser plusieurs millions de siècles. C'est dans cette vue que nous avons traité séparément la question relative au solide d'une profondeur infinie, dont toutes les parties auraient reçu la même température initiale b. Or la solution de cette dernière question doit donner le même résultat que celle qui exprime l'état variable d'une sphère d'un rayon infini, et dont tous les points auraient eu la température initiale b. Il faut donc, dans l'équation (9), remplacer la fonction $F(\alpha)$ par une constante b et attribuer une grandeur infinie au rayon total X. Si l'on procède à ce calcul avec beaucoup d'attention, en supposant d'abord la valeur infinie dans l'équation (10), afin de déterminer toutes les valeurs de p, on reconnaît que chaque terme de la valeur de v dans l'équation (9) devient une quantité différentielle, en sorte que v est exprimé par une intégrale définie ; et l'on trouve exactement pour cette intégrale le résultat donné par l'équation (3), à laquelle on était parvenu en suivant une analyse entièrement différente.

On ne connaît point la densité des couches intérieures du globe, ni les valeurs des coefficients K, h. Ces deux derniers coefficients n'ont été déterminés jusqu'ici que pour une seule substance, le fer forgé dont la surface serait polie. Les expériences que nous avons faites pour mesurer ces coefficients ne se rapportaient point à la question actuelle ; elles avaient pour objet de comparer quelques résultats théoriques avec ceux des observations, et surtout de déterminer, du moins pour une substance, les éléments qu'exigent les applications numériques. Nous ne pouvons donc aujourd'hui appliquer les formules précédentes qu'à une sphère solide de fer, d'un rayon comparable à celui de la Terre ; mais cette application donne une idée exacte et complète des phénomènes. Il est facile ensuite de modifier les solutions générales, en supposant que les coefficients D, C, h, K varient avec l'espèce de la matière, avec la profondeur, la pression et la température. Il serait nécessaire surtout d'éprouver l'effet de la pression sur la propagation de la chaleur. On ne pourrait aujourd'hui former sur ces questions que des hypothèses fort douteuses, parce qu'on manque totalement d'observations exactes et anciennes. Au reste, les changements qui peuvent résulter de ces diverses conditions affecteraient surtout les températures à de très grandes profondeurs, et ils laissent subsister les conséquences générales qui étaient l'objet de notre recherche, et que nous allons exposer en donnant l'extrait du dernier article du Mémoire. Toutefois il est nécessaire de remarquer que ces conséquences ne sont entièrement exactes que si on les rapporte à une sphère de fer solide et homogène, d'un diamètre égal à celui de la Terre. Notre objet est moins de discuter les applications spéciales de la théorie à la masse du globe terrestre, dont la constitution intérieure nous est inconnue, que d'établir les principes mathématiques de cet ordre de phénomènes.

Conséquences générales.

I. Si la Terre était exposée depuis un grand nombre de siècles à la seule action des rayons du Soleil, et qu'elle n'eût point reçu une température primitive supérieure à celle de l'espace environnant, ou qu'elle eût perdu entièrement cette chaleur d'origine, on observerait, au-dessous de l'enveloppe où s'exercent les variations périodiques, une température constante qui serait la même pour les divers points d'une même ligne verticale. Cette température uniforme aurait lieu sensiblement jusqu'aux plus grandes distances accessibles. Dans chacun des points supérieurs, sujets aux variations et compris dans la même ligne, la valeur moyenne de toutes les températures observées à chaque instant de la période serait égale à cette température constante des lieux profonds.

II. Si l'action des rayons solaires n'avait pas été prolongée assez longtemps pour que l'échauffement fût parvenu à son terme, la température moyenne des points où s'exercent les variations, ou la température actuelle des lieux plus profonds, ne serait pas la même pour tous les points d'une même verticale; elle décroîtrait à partir de la surface.

III. Les observations paraissent indiquer que les températures sont croissantes lorsqu'on descend à de plus grandes profondeurs. Cela posé, la cause de cet accroissement est une chaleur d'origine, propre au globe terrestre, qui subsistait lorsque cette planète s'est formée, et qui se dissipe continuellement à la superficie.

IV. Si toute cette chaleur initiale était dissipée et si la Terre avait perdu aussi la chaleur qu'elle a reçue du Soleil, la température du globe serait celle de l'espace planétaire où il est placé. Cette température fondamentale, que la Terre reçoit des corps extérieurs les plus éloignés, est augmentée, premièrement, de celle qui est due à la présence du Soleil; secondement, de celle qui résulte de la chaleur primitive intérieure non encore dissipée. Les principes de la Théorie de la chaleur, appliqués à une suite d'observations précises, feront un jour connaître distinctement la température extérieure fondamentale, l'excès de température causé par les rayons solaires, et l'excès qui est dû à la chaleur primitive.

V. Cette dernière quantité, l'excès de température de la surface sur celle de l'espace extérieur, a une relation nécessaire avec l'accroissement des températures observé à différentes profondeurs. Une augmentation d'un degré centésimal par 30^m suppose que la chaleur primitive que la Terre a conservée élève présentement la température de sa surface d'environ un quart de degré au-dessus de celle de l'espace. Ce résultat est celui qui aurait lieu pour le fer, c'est-à-dire si l'enveloppe du globe terrestre était formée de cette substance. Comme on n'a encore mesuré pour aucun autre corps les trois qualités relatives à la chaleur, on ne peut assigner que dans ce seul cas la valeur assez exacte de l'excès de température. Cette valeur est proportionnelle à la conductibilité spécifique de la matière de l'enveloppe; ainsi, elle est pour le globe terrestre beaucoup moindre qu'un quart de degré. La surface du globe, qui avait dès l'origine une température très élevée, s'est refroidie dans le cours des siècles, et ne conserve aujourd'hui qu'un excédent de chaleur presque insensible, en sorte que son état actuel diffère très peu du dernier état auquel elle doit parvenir.

VI. Il n'en est pas de même des températures intérieures; elles sont, au contraire, beaucoup plus grandes que celles de l'espace planétaire; elles s'abaisseront continuellement, mais ne diminueront qu'avec une extrême lenteur. A des profondeurs de 100^m, 200^m, 300^m, l'accroissement est très sensible : il paraît qu'on peut l'évaluer à $1°$ pour 30^m ou 40^m environ. On se tromperait beaucoup si l'on supposait que cet accroissement a la même valeur pour les grandes distances; il diminue certainement à mesure qu'on s'éloigne de la surface. Si l'on possédait une suite d'observations assez précises et assez anciennes pour donner la mesure exacte des accroissements, on pourrait déterminer, par la Théorie analytique que nous avons exposée, la température actuelle des points situés à une certaine profondeur; on connaîtrait à quelles époques les diverses parties de la surface avaient une température donnée, combien il a dû s'écouler de temps pour former l'état que nous observons; mais cette étude est réservée à d'autres siècles. La Physique est une science si récente, et les observations sont encore si imparfaites, que la théorie n'y puiserait aujourd'hui que des données confuses. Toutefois, on ne peut douter que l'intérieur du globe n'ait conservé une très haute température, quoique la surface soit presque entièrement refroidie. La chaleur pénètre si lentement les matières solides que, suivant les lois mathématiques connues, les masses placées à deux ou trois myriamètres de profondeur pourraient avoir présentement la température de l'incandescence.

VII. Si l'ensemble des faits dynamiques et géologiques prouve que le globe terrestre avait, à son origine, une température très élevée, comme celle de la fusion du fer, ou seulement celle de $500°$, qui est plus de dix fois moindre, il faut en conclure qu'il s'est écoulé une très longue suite de siècles avant que la surface soit parvenue à son état actuel. L'équation

$$t = \frac{b^2}{\pi \Delta^2} \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{K}}$$

exprime la relation entre le temps t écoulé depuis l'origine du refroidissement et compté en minutes sexagésimales, la température initiale b comptée en degrés centésimaux, et l'accroissement observé, qui peut être $\frac{1}{30}$ ou $\frac{1}{40}$. Le rapport $\frac{CD}{K}$ est environ 1033 pour le fer; il est, de plus, huit fois plus grand pour les matières communes de l'enveloppe terrestre.

VIII. L'accroissement Δ ou la différence que l'on observe à des profondeurs médiocres, comme de 100^m à 500^m, entre la température fixe d'un certain point d'une verticale et la température fixe d'un second point de cette verticale placé à 1^m au-dessous du premier, varie avec le temps suivant une loi fort simple. Cet accroissement a été, à une certaine époque, double de ce qu'il est aujourd'hui. Il aura une valeur deux fois moindre que sa valeur actuelle lorsqu'il se sera écoulé, depuis le commencement du refroidissement, un temps quatre fois plus grand que celui qui s'est écoulé jusqu'à ce jour. En général, l'accroissement Δ varie en raison inverse de la racine carrée des temps écoulés.

IX. La température d'un lieu donné de la surface diminue par l'effet du refroidissement séculaire du globe; mais cette diminution est énormément petite, même dans le cours de plusieurs siècles. La quantité dont la température de la surface s'abaisse pendant une année est égale à l'excès actuel de la température, divisé par le double du nombre d'années écoulées depuis l'origine du refroidissement.

Nous avons démontré, dans le Mémoire, que la variation séculaire ω de la température de la surface est exprimée par l'équation

$$\omega = \frac{K}{h}\,\frac{\Delta}{2T}.$$

On désigne par Δ le nombre de degrés dont la température augmente lorsque la profondeur augmente de 1^m; T est le nombre de siècles écoulés depuis l'origine du refroidissement; ω est la quantité dont la température de la surface s'abaisse pendant le cours d'un siècle. Le rapport $\frac{K}{h}$ est d'environ 7,5 pour le fer; il peut être neuf fois moindre pour le globe terrestre. Δ peut être supposé $\frac{1}{30}$ ou $\frac{1}{40}$. Quant au nombre T, il est évident qu'on ne peut l'assigner; mais on est du moins certain qu'il surpasse la durée des temps historiques, telle qu'on peut la connaître aujourd'hui par les annales authentiques les plus anciennes : ce nombre n'est donc pas moindre que soixante ou quatre-vingts siècles. On en conclut, avec certitude, que l'abaissement de la température pendant un siècle est plus petit que $\frac{1}{57600}$ d'un degré centésimal. Depuis l'École grecque d'Alexandrie jusqu'à nous, la déperdition de la chaleur centrale n'a pas occasionné un abaissement thermométrique d'un 288^e de degré. Les températures de la superficie du globe ont diminué autrefois, et elles ont subi des changements très grands et assez rapides; mais cette cause a, pour ainsi dire, cessé d'agir à la surface : la longue durée du phénomène en a rendu le progrès insensible, et le seul fait de cette durée suffit pour prouver la stabilité des températures.

X. D'autres causes accessoires, propres à chaque climat, ont une influence bien plus sensible sur la valeur moyenne des températures à l'extrême surface. L'expression analytique de cette valeur moyenne contient un coefficient numérique qui désigne la facilité avec laquelle la chaleur des corps abandonne la dernière surface et se dissipe dans l'air. Or cet état de la superficie peut subir, par les travaux des hommes, ou par la seule action de la nature, des altérations accidentelles qui s'étendent à de vastes territoires : ces causes influent progressivement sur la température moyenne des climats. On ne peut douter que les résultats n'en soient sensibles, tandis que l'effet de refroidissement du globe est devenu inappréciable. La hauteur du sol, sa configuration, sa nature, l'état superficiel, la présence et l'étendue des eaux, la direction des vents, la situation des mers voisines, concourent, avec les positions géographiques, à déterminer les températures des climats. C'est à des causes semblables, et non à l'inégale durée des saisons, que se rapporteraient les différences observées dans les températures des deux hémisphères.

XI. On peut connaître d'une manière assez approchée la quantité de chaleur primitive qui se perd dans un lieu donné, à la surface de la Terre, pendant un certain temps. En supposant la conducibilité propre neuf fois moindre que celle du fer, ce qui paraît résulter d'une expérience de M. H.-B. de Saussure, on trouve que la quantité de chaleur qui se dissipe pendant un siècle par l'effet du refroidissement progressif du globe, et qui traverse une surface d'un mètre carré, équivaut à celle qui fondrait un prisme de glace dont ce mètre carré serait la base, et dont la hauteur serait environ 3^m. L'abaissement de la température pendant un siècle est insensible, mais la quantité de chaleur perdue est très grande.

XII. La quantité de chaleur solaire qui, pendant une partie de l'année, pénètre au-dessous de la surface de la Terre et cause les variations périodiques est beaucoup plus grande que la quantité annuelle de chaleur primitive qui se dissipe dans l'espace; mais ces deux effets diffèrent essentiellement en ce que l'un est alternatif, tandis que le second s'exerce toujours dans le même sens. La chaleur primitive qui se perd dans l'espace n'est remplacée par aucune autre; celle que le Soleil avait communiquée à la Terre, pendant une saison, se dissipe pendant la saison opposée. Ainsi, la chaleur émanée du Soleil a cessé depuis longtemps de s'accumuler dans l'intérieur du globe, et elle n'a plus d'autre effet que d'y maintenir l'inégalité des climats et les alternatives des saisons.

Nous ne rappelons point ici les conséquences que nous avons démontrées dans les Mémoires précédents en donnant l'analyse des mouvements périodiques de la chaleur à la surface d'une sphère solide; nous remarquerons seulement que l'étendue des variations, les époques successives qui les ramènent, la profondeur où elle cesse d'être sensible, la relation très simple de cette profondeur avec la durée de la période, en un mot, toutes les circonstances du phénomène, telles qu'on les a observées, sont clairement représentées par la solution analytique. Il suffirait de mesurer avec précision quelques résultats principaux, dans un lieu donné, pour en conclure la valeur numérique des coefficients qui mesurent la conducibilité. C'est l'examen de quelques expériences de ce genre qui nous a donné lieu d'évaluer à un trente-sixième de degré l'élévation actuelle de la température de la surface du globe au-dessus de la température fixe des espaces planétaires.

Nous ajoutons, en terminant cet Extrait, que les valeurs numériques qui y sont rapportées ne peuvent être regardées comme exactes, ou même comme très approchées; car elles sont sujettes à toutes les incertitudes des observations. Mais il n'en est pas de même des principes de la théorie; ils sont exactement démontrés et indépendants de toute hypothèse physique sur la nature de la chaleur. Cette cause générale est assujettie à des lois mathématiques immuables, et les équations différentielles sont les expressions de ces lois. Les expériences montrent jusqu'ici que les coefficients qui entrent dans ces équations ont des valeurs sensiblement constantes lorsque les températures sont comprises dans des limites peu différentes. Quelles que puissent être ces variations, les équations différentielles subsistent; il faudrait seulement modifier les intégrales pour avoir égard à ces variations. Les équations fondamentales de la Théorie de la chaleur sont, à proprement parler, pour cet ordre de phénomènes, ce que, dans les questions de Statique et de Dynamique, sont les théorèmes généraux et les équations du mouvement.