

La révolution silencieuse de Joseph Fourier

Joseph Fourier (1768-1830) est une figure de la pensée scientifique aussi célèbre que controversée. Il n'a jamais joui de l'assentiment que l'histoire accorde aux hommes illustres et jusqu'à une date récente la postérité fut à son endroit assez chiche en éloges. Il essuya la défiance de ses contemporains puis le dédain de l'école formaliste. Tenu dans une obscurité relative, il passe pour avoir créé un outil de grande utilité mais d'une portée théorique restreinte. Fourier a été regardé comme un iconoclaste. Il prétendait fonder la physique mathématique sur une mathématique et une physique dissidentes, qui devaient suppléer à la physique classique. Ses conceptions audacieuses, soutenues par des raisonnements contestés, ont provoqué le scepticisme. La controverse qui opposa Fourier à ses pairs rappelle étrangement le fameux antagonisme entre le génie et le législateur, les deux types d'homme les plus représentatifs du XVIII^e siècle suivant Diderot. Le génie se caractérise par la puissance de synthèse, la vision synoptique des connexions, une fermentation de pensées sourdes qui font brusquement irruption dans la conscience et l'histoire. Ces vues paraissaient surannées aux yeux des contemporains de Fourier car le législateur avait éclipsé le génie depuis longtemps. La pensée scientifique entraînait alors dans une époque du savoir dominée par le formalisme. Aussi Fourier incarne-t-il comme nul autre l'éternel litige de la fécondité et de la rigueur¹.

Fourier accomplit deux révolutions, l'une en physique, l'autre en mathématiques. Il introduisit en physique la considération des séries qui portent son nom, dont les termes sont des fonctions trigonométriques et la somme une fonction périodique. Brisant le cadre analytique du XVIII^e siècle, il montra en mathématiques

¹ Sur les ouvrages présentant une vue d'ensemble: cf. Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Joseph Fourier 1768-1830 Créateur de la Physique-Mathématique*, Paris, Belin, 1998, 768 p. – Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert donnent une bibliographie sélective p.37, n. 2. – Heinrich Burkhardt, *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. Erster Hauptteil : Die Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen und astronomischen Problemen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, X-2 :1-894, 1908.

qu'une fonction quelconque, aussi irrégulière soit-elle, peut être représentée et donc décomposée en une série infinie de fonctions sinusoïdales². Fourier transforma profondément la notion de fonction³, ce qui entraîna la redéfinition de celle de continuité.

L'idée des fonctions trigonométriques appartient à Jean Bernoulli qui en exposa la méthode à Leibniz dans une lettre de 1694⁴. Elle fut développée par Euler dans son *Introduction à l'analyse des infiniment petits*⁵ de 1748. Parmi les fonctions élémentaires d'une variable, Euler distingue les fonctions algébriques d'une part (polynômes et fractions rationnelles) formées seulement par des opérations algébriques, et les fonctions transcendentes de l'autre (logarithmes, exponentielles, élévation à des puissances irrationnelles), dont la formation résulte d'opérations transcendentes⁶. Les chapitres VI à VIII de l'*Introduction* traitent des fonctions exponentielles et trigonométriques, logarithmes, fonctions génératrices et partitions de nombres, séries récurrentes et fractions continues. On y rencontre l'expression du sinus et du cosinus en produits infinis. Euler donne pour le sinus un développement en produit infini qui rend manifeste sa périodicité. Les fonctions de la trigonométrie circulaire viennent ainsi s'ajouter à l'algèbre des polynômes et des

² The *Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies, 1638-1788*: Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia Vol. X Et XI Seriei Secundae Volume 11 of Leonhardi Euleri opera omnia: Ser. 2. Author, Clifford Ambrose Truesdell. Publisher, Orell Füssli, 1970, 435 pages.

³ Sur la notion de fonction d'Euler à Fourier, Felix Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint - Arithmetic - Algebra, Analysis* (éd. or. 1908), New York, 1932, Cosimo, 2007, p. 200-207. – A. Dahan-Dalmedico/ J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Paris, Seuil (1982) 1986, ch. 6, « Le concept de fonction et le développement de l'analyse », p. 208-247.

⁴ cf. Jean Itard, « Les fonctions logarithmique et exponentielle », paru in *A.P.M.*, n° 139, mars 1951. Rééd. in *Essais d'histoire des mathématiques*, réunis et introduits par Roshdi Rashed, Paris, Blanchard, 1984, pp.73- 82.

⁵ Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum*. Lausannae : apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios, 1748. - trad. fr. Pezzi, *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, Strasbourg, Librairie académique, 1786.– et *Introduction à l'analyse infinitésimale* - Volumes 1 et 2, Fac-similé de l'édition Barrois, Paris, 1796-1797, Paris, Jacques Gabay, 2007, 788 p. – Pour une analyse de l'*Introductio in analysin infinitorum*, cf. Christian Houzel, « Euler et l'apparition du formalisme », in Christian Houzel, Jean-Louis Ovaert, Pierre Raymond, Jean-Jacques Sansuc, *Philosophie et calcul de l'infini*, Paris, Maspero, 1976, pp. 123-156. –

⁶ cf. Jean Toussaint Desanti, *Les Idéalités mathématiques : Recherches épistémologiques sur le développement de la théorie des fonctions de variables réelles*, Paris, Éditions du Seuil, 1968, VIII-320 p. - Jean Toussaint Desanti, "De Cauchy à Riemann ou la naissance de la théorie des fonctions de variables réelles », in François Le Lionnais éd., *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud. 1948, nouvelle édition augmentée, Paris, Blanchard, 1962, pp.179-187.

quotients. L'algèbre infinitésimale des logarithmes, la fonction exponentielle et les fonctions circulaires inaugurent pour Euler un nouveau style algébrique, une nouvelle technique de pensée munie d'une écriture symbolique de caractère opératoire.

Jean Dieudonné écrit à propos du tournant du XVII^e au XVIII^e siècle: « Tout gravite en réalité autour de la notion de fonction. Un des grands succès du XVII^e siècle a été de découvrir que les fonctions « élémentaires » (fonctions rationnelles, exponentielle et logarithme, fonctions circulaires directes et inverses) peuvent s'exprimer par des séries entières convergentes au moins localement, et qu'aussi bien les opérations algébriques usuelles que celles du Calcul infinitésimal, appliquées à des fonctions de ce type (c'est-à-dire ce que nous appelons aujourd'hui les fonctions analytiques) donnent pour résultat des fonctions de même type. Au début du dix-huitième siècle, ces fonctions sont les seules qui soient considérées par les mathématiciens; ce sont celles qu'Euler appelle fonctions « continues » ou « régulières », sans d'ailleurs les définir de façon plus précise qu'en disant que leurs valeurs sont liées par une « équation » à celles de la variable⁷. »

Euler applique ainsi un traitement strictement analytique aux fonctions trigonométriques et ne conçoit pas que celles-ci puissent sortir du domaine naturel de définition des fonctions. Toutefois les valeurs transcendantes - logarithmes et rapports trigonométriques - constituent un groupe plus vaste et varié que celui des valeurs algébriques; elles comprennent certaines des quantités les plus fondamentales des mathématiques modernes et jouent un rôle prédominant dans la plupart des problèmes pratiques. Fourier en libéra le contenu et Liouville en spécifia la nature.

Alors que le XVIII^e siècle avait admis avec Euler, d'Alembert et Lagrange, qu'une fonction était inséparable de son expression analytique, Fourier affirma qu'elle pouvait se

⁷ Jean Dieudonné, in J. Dieudonné, Pierre Dugac, W. J. et F. Ellison... [et al.], *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Paris, Hermann, 1978, t. I, p. 22.

considérer indépendamment des opérations qui s'y rapportent. La courbe d'une corde vibrante, par exemple, révèle une correspondance fonctionnelle qui n'est pas une expression analytique⁸ et ne répond donc pas à un procédé régulier de formation. Alors qu'Euler, d'Alembert⁹ et Lagrange¹⁰ s'accordent encore à penser que les fonctions arbitraires¹¹ échappent à l'analyse – laquelle est restreinte au domaine de la continuité – et ne peuvent être représentées par des séries trigonométriques, Fourier soutient au contraire que n'importe quelle fonction peut se représenter par une série trigonométrique. Le développement en série de Fourier s'applique donc aussi bien à une fonction continue – qui n'admet qu'une seule expression analytique – qu'à une fonction discontinue – qui en admet plusieurs. Fourier rompt par là avec la définition des fonctions entendues comme fonctions

⁸ Sur l'histoire de la corde vibrante: Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Joseph Fourier 1768-1830 Créateur de la Physique-Mathématique*, éd. cit., p. 615, n. 279. – Serghei S. Demidov Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert. In: *Revue d'histoire des sciences*, tome 35, n°1, 1982. pp. 3-42. – Alain Herreman, *L'inauguration des séries trigonométriques dans la Théorie analytique de la chaleur de Fourier et dans la controverse des cordes vibrantes*, avec une bibliographie sélective; en ligne, avril-mai 2011. –

⁹ Jean Le Rond D'Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. HAB, pages 214-219, 1749a. – Jean Le Rond D'Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration : Suite. HAB, pages 220-249, 1749b. – Alexandre Guilbaud et Guillaume Jouve, La résolution des équations aux dérivées partielles dans les *Opuscules mathématiques* de d'Alembert (1761-1783), *Revue d'histoire des mathématiques*, T.15, fasc. (2010), p. 59-122; en ligne.

Cf. p 107: « Ces derniers travaux font donc état d'une considérable évolution de son approche vis-à-vis de la notion de fonction. Mais, ce n'est pas pour autant un ralliement à la position défendue par Euler, car D'Alembert continue à exiger l'absence de sauts de courbure, même s'il a renoncé à la permanence de la forme. La combinaison de ces deux aspects fait que son point de vue est assez proche de la notion moderne de fonctions de classe C2. »; et p. 108, « Cette étude partielle du débat sur la nature des fonctions arbitraires nous a finalement permis de montrer comment la démarche de D'Alembert vis-à-vis des EDP, fortement ancrée dans un cadre physico-mathématique, a pu avoir des répercussions en dehors du seul calcul aux différences partielles. La polémique en question va d'ailleurs se poursuivre après sa mort. À ce propos, nous renvoyons le lecteur à l'étude de H. Burkhardt où ce dernier donne un aperçu des travaux sur le sujet de Lagrange, Laplace, Arbogast, Monge et quelques autres, des années 1780 jusqu'au début du XIX^e siècle [Burkhardt 1908, p. 43–47]».

¹⁰ Joseph-Louis Lagrange, « Recherches sur la nature et la propagation du son », *Oeuvres de Lagrange* publiées par J.-A. Serret, Tome I, Paris, 1867, pp. 39-148; « Recherches sur la nature et la propagation du son », Mélanges de Turin 1759, dans *Oeuvres de Lagrange*, tome I, 1869. – Sur l'histoire du concept de fonction au XVIII^e siècle et le problème des cordes vibrantes: Laurent Guin, *Le travail de Lagrange sur la question des cordes vibrantes*, Web, 2016.

¹¹ Sur l'histoire de la notion de fonction arbitraire, cf. Victor Wasiolek, *La théorie de l'intégration de Lebesgue*, Web, 2010, avec un examen détaillé des conceptions de Fourier, Cauchy, Dirichlet, Riemann.

analytiques. Il parvient ainsi à résoudre le problème de la corde vibrante en donnant une forme mathématique au principe de coexistence des petites oscillations harmoniques.

Daniel Bernoulli avait conçu l'équation des ondes comme l'expression d'un nombre infini d'ondes sinusoïdales stationnaires. Il en avait déduit que le mouvement le plus général d'un système mécanique possédant plusieurs degrés de liberté s'assimilait à une superposition de mouvements harmoniques simples. Dès 1740 Daniel Bernoulli avait affirmé le principe de coexistence des petites oscillations harmoniques et avait de nouveau soutenu en 1753 que les divers modes de vibration d'une corde vibrante pouvaient coexister simultanément¹². Toute onde est susceptible d'être représentée par une simple superposition, c'est-à-dire une combinaison linéaire d'ondes monochromatiques de diverses fréquences, strictement indépendantes et dépourvues d'interactions. Le principe de superposition sans interaction fonde la physique des ondes. Il traduit le fait que chaque onde se propage dans le milieu indépendamment de l'existence des autres ondes. Cette proposition se comprend intuitivement en considérant qu'une corde ne peut vibrer dans son ensemble qu'en se subdivisant d'elle-même en un certain nombre de segments égaux dont chacun vibre comme une corde indépendante. Aux vibrations de la corde entière se superposent toujours celles de ses parties aliquotes. Sauveur avait nommé harmoniques ces petites vibrations qui se superposent comme des multiples entiers de la fréquence fondamentale et il en avait observé le phénomène de la résonance multiple, le caractère de mélange qui fait de cette espèce de sons un « système de musique » propre à la nature. Fourier établit le système commun auquel tiennent ces sons formés par la coexistence des vibrations.

¹² Daniel Bernoulli. *Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes* exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748. HAB, pages 147-172, 1755a. – Daniel Bernoulli, *Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps*, HAB, pages 173-195, 1755b.

Contre l'avis d'Euler, Fourier se rangea au point de vue synthétique de Daniel Bernoulli qui avait conclu à la possibilité d'assimiler le mouvement de la corde vibrante à une composition mathématique de sinusoides. Fourier fit ainsi progresser la technique de résolution des équations aux dérivées partielles et entreprit la révision de la notion de fonction. Les équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en acoustique sont généralement linéaires et à coefficients constants. Cette propriété permet de considérer que si plusieurs petits mouvements existent isolément sous l'action de certaines causes, elles coexistent sous l'action simultanée de ces mêmes causes. Il s'agit là de la traduction analytique d'un principe physique, non d'une simple équivalence cinématique. D'une manière générale, la représentation d'une fonction en série donne les variations instantanées d'un phénomène lié à l'écoulement progressif du temps. Elle porte en physique sur de petites variations concomitantes de grandeurs.

Jean Cavallès écrit: « L'originalité de Fourier, remarque Sachse¹³, n'est pas – contrairement à ce que dit Riemann – dans le procédé de calcul des coefficients, déjà utilisé par Lagrange et Euler, aux travaux desquels d'ailleurs Fourier renvoie lui-même, mais d'avoir vu « qu'une série trigonométrique, avec des coefficients ainsi déterminés, peut représenter une fonction arbitraire quelconque »; la méthode semblait tellement sûre pour résoudre le problème que pendant un demi-siècle séries trigonométriques et séries de Fourier furent identifiées, jusqu'à ce que Heine, en 1870, s'avisât le premier de faire la distinction¹⁴.»

Fourier considéra les séries trigonométriques comme un type de relations entre variables plus général que tout ce qui avait été

¹³ Arnold Schase, Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique, trad. fr. in *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1880, T. IV, pp. 43-64 et 83-72; cit. p. 46 (Gallica-Bnf). – cf. Jean Dieudonné, Pierre Dugac, W. J. et F. Ellison... [et al.], *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Paris, Hermann, 1978, T.I, ch.VI, « Fondements de l'analyse », par Pierre Dugac : « La représentation des fonctions arbitraires par des séries trigonométriques. Les travaux de Fourier et de Dirichlet », pp. 345-349. ; et T. II, ch. VIII, « L'analyse fonctionnelle » par Jean Dieudonné, § 6 A « Séries de Fourier et problème de Sturm-Liouville », pp. 138-142.

¹⁴ Jean Cavallès, Philosophie des mathématiques, *Œuvres complètes*, Paris, Hermann, p. 244 (46)- 245 (47).

étudié auparavant et tenta de donner de la fonction une définition suffisamment large pour englober la totalité des relations considérées, anciennes et nouvelles. Son théorème est aujourd'hui reconnu comme l'acte fondateur de l'analyse harmonique, qui ouvre la voie à l'étude de tout signal périodique. L'analyse harmonique désigne la théorie de la décomposition des fonctions en séries de Fourier¹⁵. L'analyse harmonique est la recherche des harmoniques présents dans une fonction; la synthèse harmonique, dite aussi synthèse spectrale, consiste dans la reconstitution de la fonction à partir des harmoniques qu'elle contient. La transformation de Fourier, qui postule l'équivalence de l'analyse et de la synthèse, admet une réciprocity sans déperdition d'information. Fourier a ainsi déterminé la propagation de la chaleur dans un corps solide en décomposant une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente. Ce type de développement en série s'est trouvé pouvoir également s'appliquer aux fonctions de Bessel¹⁶ ainsi qu'aux polynômes de Legendre.

L'analyse de Fourier établit, en acoustique, que toute vibration complexe peut s'analyser comme une superposition finie ou infinie de composantes sinusoïdales qui diffèrent en amplitude, fréquence et phase. Le spectre acoustique, qui résulte de la décomposition en séries de Fourier, montre la répartition de l'énergie acoustique entre les diverses composantes du son complexe et donne l'amplitude et la phase affectées à chaque harmonique. Les amplitudes se nomment coefficients de Fourier. Outre le caractère radicalement novateur du procédé mathématique, le théorème de Fourier a la valeur d'un énoncé de physique: il clarifie le type de relation qui unit la superposition des fonctions sinusoïdales tout en maintenant celles-ci dans un état

¹⁵ cf. Jean-Michel Bony, Yvan Martel, *Analyse de Fourier, analyse spectrale et équations aux dérivées partielles*, Web 2013.

¹⁶ Dhombres et Robert, éd. cit., p. 583 et 618. n. 315.— Les fonctions de Bessel jouent un rôle essentiel dans la technique de synthèse par modulation de fréquence, cf. John Chowning, « The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation », *Journal of the Audio Engineering Society*, 21, n° 7, pp. 526-534, New York, Septembre 1973.

d'indépendance. La physique mathématique de Fourier est une théorie du mouvement composé, dont les parties ne peuvent s'unir qu'en se juxtaposant, en restant distinctes.

En bref, la série de Fourier d'une fonction périodique se compose exclusivement des fréquences égales aux multiples entiers de la fondamentale. Une fonction qui n'est pas périodique se décrit néanmoins par une superposition de sinus et de cosinus, à la condition de calculer les coefficients des fréquences. Inversement, la combinaison d'un nombre quelconque de vibrations sinusoïdales simples produit une vibration unique de forme plus complexe.

La transformation qu'impose Fourier à la notion de fonction aura été d'un apport déterminant. Jean-Pierre Kahane écrit: « La façon dont Fourier les a présentées (fonction arbitraire, série toujours convergente) est incorrecte en tant qu'énoncé de théorème, mais c'est mieux qu'un énoncé : c'est un programme. Comme Riemann le disait, il est essentiel de les associer et ce fut le mérite de Fourier. Elles préfigurent toute l'analyse harmonique contemporaine, par le couplage entre l'analyse proprement dite, la détermination de l'amplitude et de la phase à attribuer à chaque harmonique (c'est la formule $c_n = \int$) et la synthèse, qui est le mode de reconstitution du phénomène à partir de ces harmoniques (c'est la formule $f = \Sigma$). Fourier a raison de dire que le calcul des coefficients éclaire le problème des cordes vibrantes, qui avait opposé d'Alembert, Euler et Lagrange à Daniel Bernoulli, au bénéfice de Daniel Bernoulli. L'usage du terme « harmonique » est issu de l'analyse et de la synthèse des sons, qui reste aujourd'hui encore l'une des inspirations de la théorie du signal¹⁷. »

¹⁷ Jean-Pierre Kahane, « Fourier, un mathématicien inspiré par la physique », *Images de la physique*, Revue scientifique du CNRS, 2009, pp. 3-10.

Fourier donna de nombreux exemples de ses séries conçues en 1807, mais Dirichlet en réalisa le « polissage mathématique»¹⁸ en 1822-26 et fournit les preuves de convergence. Poisson écrivit en 1808 la relation qui lie la fonction et sa transformée¹⁹ et Cauchy démontra la proposition de Fourier en 1816²⁰. Riemann développa en 1854 une théorie générale des séries trigonométriques²¹ dans laquelle il soutenait la possibilité de développer en série une fonction comportant une infinité de discontinuités. Les conditions auxquelles une fonction est représentable par sa série de Fourier ainsi que les propriétés fondamentales des fonctions harmoniques qui en découlent sont exposées par Henri Lebesgue dans ses *Leçons sur la Théorie des séries trigonométriques* de 1905²². La théorie de Fourier a ouvert la voie à une trigonométrie supérieure et s'est généralisée dans la théorie des fonctions de périodicité double ou multiple²³.

Fourier rejette ainsi tous les critères catégorisés de validité et se détache du mécanisme, du formalisme mathématique comme de la physique des forces ponctuelles. Sa philosophie revient à considérer la périodicité comme une forme fondamentale de la réalité physique

¹⁸ Gustav Peter Lejeune Dirichlet, Sur la convergence de séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. Reine Angew. Math.* 4., 157-169 (1829). L'expression est de Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, in *Joseph Fourier 1768-1830 Créateur de la Physique-Mathématique*, Paris, Belin, 1998, 768 p., p. 646.

¹⁹ Siméon-Nicolas Poisson, « Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. Extrait » *Nouveau Bulletin des Sciences par la société Philomathique*, mars 1808, t. 1, p. 112-116 (réf. in Dhombres-Robert, p. 757). « Mémoire sur la théorie des ondes », *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, (2), I (1816), 71-186.

²⁰ Augustin-Louis Cauchy, Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie, *Mém. divers Savants*, I (1827), 3-312. (Gallica Bnf). – Cf. Amy Dahan Dalmedico, L'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants dans les travaux de Cauchy (1821-1830), *Revue d'histoire des sciences*, Année 1992, 45-1, pp. 83-114; en ligne.

²¹ Bernhard Riemann, Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique dont les coefficients ne décroissent pas indéfiniment, édité en allemand, en 1854 par Dedekind, et traduit en français dans le *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 5 (1873); en ligne. Cf. Dhombres et Robert, éd. cit. p. 648-9.

²² Henri Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques* (1906), nouveau tirage, Paris, Blanchard, 1975, 128 p. – Cf. Dhombres et Robert, éd. cit. p. 650-1 et 676, n. 66. – également: Victor Wasiolek, *La théorie de l'intégration de Lebesgue*, éd. cit.

²³ Sur le développement de l'analyse au XIX^e siècle et la généralisation de la notion de fonction au moyen des intégrales de Fourier, cf. Jean Cavaillès, Philosophie des mathématiques, *Œuvres complètes*, Paris, Hermann, « Les séries trigonométriques », pp. 242(44)- 264 (66).

et pour ainsi dire son élément ultime. Sa méthode consiste dans l'application des séries à différents types d'équations aux dérivées partielles linéaires. Et si la mathématique a révélé des classes de problèmes inattendus en physique, elle a inversement tiré de leur solution le ressort de généralisations fécondes.

Fourier a mesuré le premier la puissance de la trigonométrie moderne dont les six fonctions fondamentales s'entre-expriment en une infinité de formulations différentes et sont capables de traduire n'importe quel phénomène vibratoire. Les nombreuses identités trigonométriques offrent la possibilité de transformer une fonction donnée en l'expression la plus favorable à son intégration. La mathématique supprime l'expérimentation tâtonnante et les complications inutiles pour accéder d'emblée à une forme simultanée de généralisation et de spécification. La théorie de Fourier n'entre pas dans le cadre traditionnel de la philosophie des sciences et il serait hasardeux de l'enrôler sous la bannière du positivisme.

Fourier parvint à soumettre le mouvement de la chaleur, les vibrations des corps sonores ainsi que les oscillations des liquides à un seul et même type d'explication théorique. Découvrant une affinité de structure entre ces domaines d'autant plus surprenante qu'elle revêt des apparences plus dissemblables, il rassemble ces phénomènes en une conception unitaire. Ce qui revenait à postuler que toutes les relations élémentaires de la science pouvaient recevoir une expression en termes de sinus. Norbert Wiener formulera en 1930 les principes d'une analyse harmonique généralisée qui renouvelle et approfondit l'étude des transformées²⁴. Wiener étend l'analyse harmonique au mouvement brownien, au bruit, à la lumière blanche, autant de processus qui échappent à la périodicité. Jean-Pierre Kahane écrit: « Les idées développées dans le monumental article General harmonic analysis [...] ont, de ce fait, jeté un pont entre la théorie des

²⁴ Norbert Wiener, Generalized harmonic analysis, *Acta Math.* **55**, 117-258 (1930) – Norbert Wiener, The historical background of harmonic analysis, *American Mathematics semicentennial publications*, II, New York, 56-58 (1938).

processus stochastiques (mouvement brownien en particulier) et l'analyse de Fourier proprement dite²⁵. »

Ainsi la transformation de Fourier s'applique-t-elle aujourd'hui aussi bien à la propagation des ondes électromagnétiques qu'à la théorie du signal, et se retrouve-t-elle en imagerie numérique, compression des données, théorie des ondelettes et bien d'autres domaines encore – rayonnement thermique, transmissions radio, rayons du spectre visible, rayons X, optique, physique quantique²⁶.

Au terme d'une vie qui offre de grands contrastes, Fourier est élu secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Cependant il n'emporte jamais tous les suffrages. Fourier a certes des admirateurs, tel Auguste Comte qui l'annexe au positivisme²⁷, mais ses biographes – Victor Cousin, François Arago – passent sous silence l'oeuvre mathématique. Confiné dans un rôle routinier, Fourier tombe peu à peu dans l'oubli. Il ne reste de lui qu'un formulaire. Nicolas Bourbaki lui assigne le rang d'un simple jalon de l'histoire et lui retire le mérite de sa découverte essentielle – le développement de fonctions non périodiques en séries trigonométriques – pour l'attribuer à ses prédécesseurs, Euler et Clairaut²⁸. Selon Bourbaki, l'oeuvre de Fourier pâtit d'un tel anachronisme²⁹ que Dirichlet a dû procéder à une refonte totale afin de lever la confusion des énoncés et d'en réévaluer la généralité³⁰. Bourbaki ne concède qu'une portée restreinte aux recherches de Fourier et Poisson sur la théorie de la chaleur. Trop étroitement limitée à son objet, cette théorie n'aborderait qu'un

²⁵ Jean-Pierre Kahane, Norbert Wiener et l'analyse de Fourier, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, 1, II, 42-47 (1966), en ligne, p. 47.

²⁶ David C. Champeney, *Fourier Transforms and their Physical Applications*, London, Academic Press, 1973. – R.N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Application*, second edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.

²⁷ Jean Dhombres, « L'analogie dans les mathématiques analytiques selon Auguste Comte », *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, vol. tome 132, no. 4, 2007, pp. 451-470; en ligne. |

²⁸ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960, pp. 217, 223 n. 1, 231, 246 n.1.

²⁹ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, éd. cit., pp. 234, 246 n.1, 247 n.1.

³⁰ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960, pp. 246 n. 1, 247, n. 1.

cas particulier du développement en séries des fonctions dites « orthogonales »³¹. Sturm et Liouville établiront, vers 1830, la théorie générale des oscillations³². Certes Fourier passe pour avoir élargi et transformé la notion de fonction mais la gloire en revient véritablement à Cauchy qui a su définir les notions de limite et de convergence³³ d'où s'ensuivront celles de fonction continue et de dérivée³⁴. Somme toute, l'unique mérite de Fourier est d'avoir « proclamé » « la possibilité de représenter des fonctions discontinues comme somme des séries trigonométriques³⁵ ».

La sévérité d'un tel verdict illustre le jugement de la postérité depuis les premiers « éloges » de Fourier jusque vers les années 1960, une époque encore dominée par le formalisme, le paradigme de la rigueur et l'idéologie de la pureté. Dans sa thèse complémentaire de 1928, Gaston Bachelard reconnaissait que Fourier avait converti l'étude des phénomènes thermiques en une branche de la physique mathématique³⁶, sans pour autant lui concéder l'ampleur ni la radicalité d'une réforme fondamentale. La « théorie de la chaleur » n'apportait pas de nouvelle analytique.

Dans *La Mathématique reine et servante des sciences* (1952)³⁷, Eric Temple Bell soutient en revanche que la théorie des séries de Fourier apporte une contribution aussi significative aux mathématiques pures³⁸ qu'aux mathématiques appliquées³⁹, car elle représente « un épisode-pivot dans la théorie plus vaste de

³¹ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, éd. cit., p. 231.

³² Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, éd. cit., p. 231.

³³ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, éd. cit., p. 163.

³⁴ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, éd. cit., p. 218.

³⁵ Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, éd. cit., p. 246.

³⁶ Gaston Bachelard, *Etude de l'évolution d'un problème de physique*, Paris, Vrin, 1928.

³⁷ E.T. Bell *La Mathématique reine et servante des sciences*, Paris Payot 1953; éd. or., *Mathematics (Queen and Servant of Science)* G. Bell & Sons Ltd. 1952 (cette publication réunit deux volumes parus respectivement en 1931 et 1933).

³⁸ E.T. Bell *La Mathématique*, éd. cit., p. 22.

³⁹ E.T. Bell *La Mathématique*, éd. cit., p.321.

ce qu'on appelle *fonctions orthogonales*⁴⁰. » Et dans *The Development of Mathematics*, au chapitre intitulé « From Intuition to Absolute Rigor (1700-1900) », l'auteur assigne à Fourier une place à part dans l'élaboration des mathématiques rigoureuses. Certes pour parvenir à des résultats corrects, Fourier a préféré se fier à ses intuitions de physicien plutôt qu'à la considération rigoureuse des problèmes de convergence⁴¹. Il aura néanmoins incité les mathématiciens à réexaminer les notions de fonction arbitraire, de nombre réel et de continuité, ouvrant la voie à la problématique du continu de Weierstrass, Cantor et Dedekind. Dans une perspective proche, Carl B. Boyer reconnaît à Fourier le mérite d'avoir inauguré le long processus d'« arithmétisation de l'analyse⁴² » et d'avoir introduit des schèmes et des modes de pensée qui donneront une impulsion décisive aux développements ultérieurs des mathématiques.

Renonçant à toute recherche sur la structure intime de la matière, Fourier a revendiqué l'originalité d'une théorie et d'une méthode qui s'appliquaient aux intuitions du flux⁴³ et du champ continu⁴⁴. Ernst Mach écrit: « [...] c'est par l'étude des liquides que s'est formée pour la première fois l'idée d'un continuum physique mécanique, ce qui développa des conceptions mathématiques beaucoup plus libres et fécondes que cela n'était possible même par l'étude de systèmes de plusieurs solides⁴⁵. » Ce type de réalité physique n'admet que des changements d'état et n'est pas explicable par la mécanique des particules ponctuelles.

⁴⁰ E.T. Bell *La Mathématique*, éd. cit., p. 322.– sur ce point, Dhombres et Robert, éd. cit., p. 557-8, 576 et 614, n. 265.

⁴¹ E.T. Bell, *The Development of Mathematics*, New York-London, McGraw-Hill, 1945 (1ère éd. 1940), p. 293.

⁴² Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, New York London, Sydney, John Wiley & Sons, 1968, ch. XXV, « The Arithmetization of Analysis », pp. 598-619.

⁴³ cf. Jean Dhombres et Jean Bernard Robert, *Joseph Fourier*, éd. cit., pp. 480-506

⁴⁴ cf. Amy Dahan-Dalmedico, « De l'Ontologie du Discret à la Capture Relative du Continu (La Physique Mathématique, 1800-1850) », in *Le Labyrinthe du Continu*, Colloque de Cerisy, éd. Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Paris, Springer-Verlag France, 1992, p. 310-11.

⁴⁵ Ernst Mach, *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, traduit de *Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch-kritisch dargestellt*, 1883; trad. fr. Paris, Hermann, 1904; réimp. Paris, Gabay, 1987, p. 101-102.

Une telle vision des opérations de la nature devançait les progrès fondamentaux de la physique réalisés par Faraday, Maxwell et Hertz. Toutefois en refusant d'abstraire la mathématique du réel, Fourier s'exposait à de vives réserves car les mathématiciens et physiciens tendent plutôt à les déterminer l'un par l'autre⁴⁶. Pour Fourier l'analyse est coextensive à la nature.

La mesure des changements thermiques va de pair, chez Fourier, avec l'instauration d'une nouvelle structure du réel physique. Elle annonce d'ailleurs le principe plus général selon lequel tout changement d'état physique (fusion, solidification, vaporisation, condensation, dissolution...) s'accompagne d'un phénomène thermique mesurable. Réciproquement, les changements d'état pourront fournir une méthode calorimétrique. Partant de l'idée d'échange de chaleur, Fourier se propose de déterminer le transport d'énergie thermique par conduction. La loi de la conduction énonce qu'un flux de chaleur à travers un solide est proportionnel au gradient de température. Dans le chapitre intitulé « Le physicien-mathématicien de *La Théorie analytique de la chaleur* »⁴⁷, Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert montrent les transitions qui conduisent de l'expression analytique du flux de chaleur à l'équation générale de propagation. Énumérant les notions fondamentales de la théorie de la chaleur – chaleur spécifique, température, quantité de chaleur, conductibilité –, les auteurs écrivent: « Dans la *Théorie analytique* enfin constituée, l'organisation du réel physique est d'emblée fonctionnelle⁴⁸.» Fourier écrit dans le *Discours préliminaire*: « Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et ramènent les questions physiques

⁴⁶ cf. Jean Dhombres et Jean Bernard Robert, *Joseph Fourier*, éd. cit., pp. 662-671.

⁴⁷ Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Joseph Fourier*, éd. cit., ch. VIII, « Le physicien-mathématicien de *La Théorie analytique de la chaleur* », pp. 443-620.

⁴⁸ Jean Dhombres et Jean Bernard Robert, éd.cit., p. 467.

à des problèmes d'analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie⁴⁹.»

La mathématique en vient à jouer un rôle « expérimental⁵⁰», qui consiste à effectuer un tri parmi les possibles. Elle opère sous un principe de totalité. Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert montrent le caractère architectonique de la méthode: « Fourier ne sépare pas un objet mathématique, une fonction périodique par exemple, de la méthode qui le met en place en le décomposant et le recomposant: si la *Théorie analytique de la chaleur* fonctionne comme un tout, il est donc dangereux d'en isoler les parties⁵¹. »

Une telle méthode nécessite la vérification de l'homogénéité des expressions. Les principes de l'analyse dimensionnelle sont précisément énoncés dans la Section IX (art. 157-162) du chapitre II de la *Théorie de la chaleur*⁵². Le concept de dimension a pour fonction de discerner des compatibilités dans la logique du réel⁵³.

La mécanique rationnelle du XVII^e siècle avait été une mécanique des corps indéformables, non des milieux élastiques. L'idée d'élasticité, qui se forme dès la fin du XVII^e siècle, se mathématise tout au long du XVIII^e. L'acoustique se donnera pour objet la déformation temporaire des corps et des milieux. Diderot⁵⁴ et D'Alembert réunissent les problématiques du pendule, du ressort et de la corde vibrante en une seule entité théorique qui est celle de l'élasticité de la matière. Au cours du XIX^e siècle,

⁴⁹ Jean-Baptiste-Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, Firmin Didot, 1822; Paris, 637 p., rééd. en fac. sim. Paris, Jacques Gabay, 1988; en ligne.; Discours préliminaire p. XI.

⁵⁰ Jean Dhombres et Jean Bernard Robert, éd. cit., p. 525-527.

⁵¹ Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Joseph Fourier*, éd. cit., p. 566

⁵² cf. Jean Dhombres et Jean Bernard Robert, *Joseph Fourier*, éd. cit., « Analyse aux dimensions », pp. 515-518.

⁵³ Sur les difficultés actuelles relatives à la notion de dimension: cf. Jean Dieudonné, Pierre Dugac, W. J. et F. Ellison... [et al.], *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, éd. cit., t. II, p. 236.

⁵⁴ Denis Diderot, *Mémoires sur différents sujets de Mathématiques* [1748] Cinq Mémoires: Principes généraux d'acoustique, Examen de la développante du cercle, Paradoxe de mécanique sur la tension des cordes, Projet d'un nouvel orgue, Lettre sur la résistance de l'air au mouvement des pendules, Paris, Durand et Pissot, 1748, VI-243 p. – In *Œuvres complètes*, (J. Assézat et M. Tourneux), Paris, Garnier, t. IX, Archive internet. – Denis Diderot, *Principes généraux d'acoustique* [1748], texte établi et commenté par Jean Mayer, dans *Œuvres complètes*, tome II, Philosophie et Mathématique, Paris, Hermann, 1981, 476 p.– cf. André Charrak, La musique entre physique et mathématique. In: *Dix-huitième Siècle*, n°31, 1999. Mouvement des sciences et esthétique(s) sous la direction de Christine Rolland, François Azouvi et Michel Baridon. pp. 33-44.

l'acoustique physique se transforme de plus en plus en une étude des ondes élastiques.

Les travaux de d'Alembert sur l'analyse générale des cordes vibrantes, ceux d'Euler sur la superposition d'harmoniques en une forme d'onde complexe, de Daniel Bernoulli sur les vibrations des tuyaux d'orgue et de Joseph-Louis Lagrange sur les équations du mouvement avaient conduit, au XIX^e siècle, à inclure l'acoustique dans une étude plus générale des déformations élastiques, science qui embrassait la déformation des solides, les oscillations élastiques de ces corps ainsi que celles des courants dans les liquides ou les gaz. La mathématisation de l'élasticité s'achève avec Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) qui, en 1822, donne leur expression mathématique la plus générale aux notions primordiales de tension élastique et de déformation.

Conformément aux vues de Fourier, Landau et Lifchitz considèrent aujourd'hui l'acoustique comme un nouveau domaine de la physique théorique, faisant partie de la mécanique des milieux continus. L'acoustique se partage en deux branches : la mécanique des fluides d'une part (théorie du mouvement des gaz), celle des solides de l'autre (théorie de l'élasticité). Or ces deux sous-disciplines sont interdépendantes mais n'obéissent pas aux mêmes lois. L'état d'un fluide en mouvement est déterminé par les trois composantes de sa vitesse et celles de deux de ses caractéristiques thermodynamiques, la pression et la densité. Ce qui donne un système de cinq équations qui, pour un fluide parfait, sont précisément les équations d'Euler. L'acoustique prend place aux côtés de la théorie de la transmission de la chaleur et de celle de la combustion⁵⁵.

L'onde sonore y est considérée comme une succession de tranches de compressions et d'expansions dans le fluide. Et la représentation fondamentale de cette mécanique des fluides se résume à celle d'une vibration périodique en tout point du milieu.

⁵⁵ L.D. Landau / E. M. Lifchitz, *Physique théorique. Mécanique des fluides*, traduit du russe par Sergueï Medvénev, Moscou, 1^{ère} éd. en français: Mir 1971, 3^{ème} éd., Mir-ellipses, 1994, 752 p. , p.9.

Landau et Lifchitz écrivent: « Les ondes monochromatiques jouent un rôle essentiel, car toute onde, quelle qu'elle soit, peut être représentée par un ensemble d'ondes monochromatiques planes ayant différents vecteurs d'ondes et fréquences. Cette décomposition d'une onde en plusieurs ondes monochromatiques n'est autre que le développement en une série ou une intégrale de Fourier (que l'on désigne sous le nom de décomposition spectrale). Les composantes de cette décomposition sont désignées sous le nom de composantes monochromatiques ou de Fourier de l'onde considérée⁵⁶ ».

Si elle informe le monde, l'analyse de Fourier se heurte cependant à des limitations naturelles. Lorsqu'elle donne une information précise dans le registre des fréquences, l'analyse de Fourier n'en délivre aucune dans l'ordre de la durée. La conversion mutuelle des deux types d'information est mathématiquement assurée, mais à l'exclusion l'une de l'autre. En acoustique musicale, les spectres en fréquence et en amplitude déterminés par l'analyse de Fourier sont figés dans une invariance périodique qui réduit le temps à une dimension géométrique. Donnant du son un spectre moyen, les appareils d'analyse sonore disponibles depuis Helmholtz se sont bornés à identifier des phases stationnaires qui ignorent toute caractéristique d'ordre dynamique. L'acoustique classique s'est attachée à des facteurs de constance qui définissent le son comme une organisation permanente. On pensait que la configuration du spectre harmonique suffisait à rendre compte de la réalité du timbre. Or dans les limites d'un intervalle donné, c'est l'évolution du signal qui révèle sa structure. La réduction « classique » du son musical à un son périodique et la réduction corrélatrice du timbre au spectre

⁵⁶ L.D. Landau / E. M. Lifchitz, *Physique théorique. Mécanique des fluides*, éd. cit. pp. 360-361.

en fréquences se sont révélées insuffisantes⁵⁷. S'attachant aux valeurs moyennes des régimes stationnaires⁵⁸, l'acoustique musicale depuis Helmholtz jusqu'à Harry F. Olson⁵⁹, a négligé les facteurs qui n'entrent pas dans la définition idéale du son lisse établie par Fourier.

On le sait aujourd'hui, les sons naturels ont des évolutions spectrales si caractéristiques qu'elles s'apparentent à des signatures. Ce n'est qu'à partir de 1940 que le développement du sonographe a permis de suivre l'évolution du spectre. Les techniques courantes de synthèse numérique, directement fondées sur la mise en oeuvre du théorème de Fourier, n'ont réussi qu'avec peine à produire des spectres dynamiques⁶⁰. Car l'information utile se situe dans les replis du signal, à l'échelle de la milliseconde. L'informatique musicale a néanmoins réussi à identifier les facteurs évolutifs qui caractérisent le son musical et agir sur des indices auditivement pertinents⁶¹. Les processus de courte durée se révèlent revêtir autant d'importance que l'allure globale du spectre. Le calcul de Fourier a donc dû s'adapter à des

⁵⁷ Sur l'histoire du problème de la perception de hauteur – depuis Fourier, Ohm (1843), Seebeck (1843), Helmholtz (1869), jusqu'à von Békésy (1928), Schouten (1940), Boer (1956), Ristma (1970), Terhardt (1970), Siebert (1970), Houtsma et Goldstein (1972), cf. James Anderson Moorer, *On the Segmentation and Analysis of Continuous Musical Sound*. PhD Dissertation, CCRMA report STAN-M-3, May 1975, 164 p., pp. 22-28; et: « What is a musical sound? », pp. 3-5. – Sur la critique du point de vue classique, Jean-Claude Risset & David L. Wessel, « Exploration of timbre by Analysis and Synthesis », in Diana Deutsch *The Psychology of Music*, Academic Press, (1982) 2^e éd. 1999, pp. 113-169. – Jean-Claude Risset, « Son musical et perception auditive », *Pour la Science*, Novembre 1986, pp.32-43.

⁵⁸ Jean-Claude Risset, « Musique, calcul secret? », *Critique* 395 (1977) pp. 414–29, p. 424.

⁵⁹ Harry F. Olson, *Musical Engineering. An engineering Treatment of the Interrelated Subjects of Speech, Music, Musical Instruments, Acoustics, Sound Reproduction, and Hearing*, New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1952, 370 p.

⁶⁰ Sur les difficultés propres à la transformée discrète de Fourier, cf. Léon Brillouin, *La science et la théorie de l'information*, Paris, Masson, 1959, ch. VIII, « L'analyse des signaux. Méthode de Fourier et procédés d'échantillonnage », pp. 75-109. – Sur l'histoire de la discrétisation temporelle des événements, Aline Péliissier et Alain Tête, prés., et Trad. *Sciences cognitives ; Textes fondateurs (1943- 1950)*. Wiener, Rosenblueth, Bigelow, McCulloch, Pitts, von Neumann, Hebb, Weaver, Shannon, Turing, Paris, Presse Universitaires de France, 1995, 313 p.

⁶¹ Max V. Mathews, « An Acoustic Compiler for Music and Psychological Stimuli », in *Bell Sys. Tech. J.* **40**, Mai 1961, pp. 677-694. – Max V. Mathews, « The Digital Computer as a Musical Instrument », *Science*, New Series, Vol. 142, N° 3592 (Nov. 1, 1963), pp. 553-557, Published by American Association for the Advancement of Science. – John R. Pierce, M. V. Matthews et J.-C. Risset, « Further Experiments on the Use of the Computer in Connexion with Music », *Gravesaner Blätter*, 27/28, Novembre 1965, pp. 92-97. – Max V. Mathews, Joan E. Miller, F. R. Moore, John R. Pierce and J. C. Risset, *The Technology of Computer Music*. MIT Press, 1969, 188 p. (out of print, but on Amazon).

manifestations jugées jusque-là secondaires. C'est à une autre échelle et moyennant un agrandissement considérable, que le son acquiert des déterminations nouvelles. On distingue ainsi deux classes de caractéristiques spectrales des sons, dotées chacune de propriétés perceptives différentes. Ce sont d'une part les caractéristiques qui évoluent lentement en fonction de la fréquence et constituent la structure globale du son – appelée enveloppe spectrale. Ce sont d'autre part les caractéristiques qui évoluent rapidement en fonction de la fréquence et composent la structure fine du spectre⁶². Ces deux types de processus évolutifs – qui ne se situent pas à la même échelle – trouvent cependant une caractérisation commune dans la notion d'enveloppe. Celle-ci désigne le contour d'une modulation, qu'elle soit en fréquence, en amplitude ou en phase. Max V. Mathews, John R. Pierce et Jean-Claude Risset ont montré que la moindre altération dans les déroulements les plus rapides peut avoir des conséquences profondes au plus haut niveau de l'intégration sensorielle.

Un son se définira de la sorte par trois fonctions corrélées: le taux de transitoires inharmoniques dans les fréquences élevées durant l'attaque (qualité de l'attaque), le rapport du synchronisme de l'attaque au degré de fluctuation de l'enveloppe spectrale (flux spectral), les fluctuations de l'enveloppe spectrale (distribution de l'énergie dans le spectre selon la durée, avec un centre de gravité spectral qui détermine la qualité de brillance). L'ordinateur met en œuvre des outils mathématiques qui permettent la représentation simultanée du signal en temps, en amplitude et en fréquence. Le spectrogramme d'un son complexe synthétisé à l'ordinateur montre un enchevêtrement de formes instables. À chaque niveau de saisie des phénomènes, on remarque de nouvelles formes de

⁶² John Michael Grey, *An exploration of Musical Timbre using computer-based techniques for analysis, synthesis and perceptual scaling*, Ph. D. dissertation, Department of Psychology, Stanford University, 1975, University Microfilms international, Ann Arbor, Michigan, USA, London, England, 1980, 150 p. – J. M. Grey and J.A. Moorer, « Perceptual Evaluation of Synthetised Musical Instruments Tones, » *J. Acoust. Soc. Amer.* **62**, pp. 434-462. – Stephen McAdams, « La reconnaissance de sources et d'événements sonores », in *Penser les sons. Psychologie cognitive de l'audition*, Stephen McAdams et Emmanuel Bigand éd., Paris, PUF, 1994, ch. VI, pp. 156-212.

solidarité ou d'interdépendance entre les fonctions⁶³. Il se dégage ainsi une idée à chaque fois différente de la totalité et de la synergie entre les parties⁶⁴.

En dépit d'obstacles de principe, les caractéristiques temporelles et fréquentielles d'un signal ont pu être saisies d'un seul tenant. La transformée de Fourier à fenêtre glissante (1946), due à Dennis Gabor⁶⁵, est la première représentations temps-fréquence. Cette étape a conduit à l'analyse en ondelettes qui constitue une avancée majeure de la théorie du signal, par sa capacité à analyser des phénomènes se déroulant simultanément à des échelles différentes⁶⁶. Jean-Pierre Kahane écrit: « Le dernier avatar de séries de Fourier est la théorie des ondelettes, due à Yves Meyer pour sa partie mathématique, et qui au départ est la création et l'étude d'une nouvelle classe de séries orthogonales⁶⁷ ».

La physique moderne vérifie ainsi les intuitions de Fourier sur un autre terrain et avec d'autres moyens. La synthèse numérique de sons de nature physique arbitraire a mis en évidence le rôle primordial des facteurs temporels dans la constitution des sons. La contribution la plus remarquable de Matthews, Pierce, Risset, Chowning, Grey ou Moorer est d'avoir intégralement conçu l'acoustique et la synthèse numérique en fonction du temps.

⁶³ James Andy Moorer, *The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Discrete Summation Formulas* Journal of the Audio Engineering Society, Volume 24, Number 9, November 1976, pp. 717-727. – James A. Moorer, *The Use of the Phase Vocoder in Computer Music Applications* Journal of the Audio Engineering Society, Volume 26, Number 1/2, January/February 1978, pp. 42-45.

⁶⁴ Jean-Claude Risset, Sur certains aspects fonctionnels de l'audition, Extrait des *Annales des Télécommunications*, Tome 2, n° 3, Mars avril 1968, pp. 91-119. – Stephen McAdams, « L'image auditive. Une métaphore pour la recherche musicale et psychologique sur l'organisation auditive », traduit de l'anglais par dois Collins, Ircam, *Rapports de recherche*, n°37, 1985, 25 p.

⁶⁵ Dennis Gabor, « Theory of communication », *Journal of the Institute of Electrical Engineers*, Vol. 93, N° 3, 1946, pp. 429-457.

⁶⁶ Cf. par Yves Meyer, Stéphane Jaffard et Olivier Rioul, « L'analyse par ondelettes », *Pour La Science*, septembre 1987, pp. 28-37. – L. Lasaulce, *De la transformée de Fourier à la transformée en ondelettes*, Web, 03/09/2010, 27 p. – Un historique de l'invention des représentations temps-fréquence et temps-échelle est donné par Jean-Claude Risset, in « Aujourd'hui le son musical se calcule », *Mathématiques et art* (Colloque organisé par le Séminaire Philosophie et Mathématiques, Cerisy, 1991), sous la direction de Maurice Loi, Hermann, Paris, 1995, pp. 211-233. – Barbara Burke Hubbard, *Ondes et Ondelettes*, Pour la Science/Belin, 1998, 236 p.

⁶⁷ Jean-Pierre Kahane, « Le retour de Fourier », Institut de France, Académie des Sciences, Août 2005, p.8, en ligne. –

La caractéristique essentielle d'un son cuivré n'est pas un spectre typique mais une fonction: le spectre s'enrichit en hautes fréquences lorsque l'intensité augmente, surtout lors de l'attaque⁶⁸. Les intensités respectives des harmoniques se modifient ainsi constamment. La science du son porte sur l'instabilité dynamique de ses objets et accorde un privilège théorique aux formes instables.

Ainsi que l'a soutenu Jean-Pierre Kahane, le théorème de Fourier est un programme d'analyse et d'intégration. Car d'une part toute détermination précise est assujettie à un élargissement des vues d'ensemble. De l'autre, toute méthode de différenciation fonctionnelle consiste à révéler un mécanisme d'interactions entre des facteurs évolutifs. En se spécialisant, la technique requiert des formulations plus étroitement définies. La formalisation du savoir est ainsi essentiellement liée aux phases critiques de la détermination du processus.

Hugues Dufourt

⁶⁸ – Jean-Claude Risset et Max V. Matthews, « Analysis of Musical Instruments tones, » *Phys. Today*, **22**(2), 1969, pp. 23-30; en ligne.

