Au-delà du compas : 3000 ans de dépassement !

Où l'on verra deux problèmes de la Grèce Antique féconder 25 siècles de recherche, enrichir la géométrie, participer à la fondation de nouvelles branches des mathématiques, et les « nouvelles courbes » s'inviter jusque dans les découvertes les plus récentes...

Au début était le cercle...

Euclide a fixé le canon de la géométrie naissante, en rassemblant et en organisant dans ses *Éléments* les connaissances et les méthodes de son temps (III$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.). Tout problème posé y est résolu à l'aide des deux armes qui sont au géomètre ce que la lance et le bouclier sont à l'Hoplite : la règle et le compas.
Ainsi, doubler l'aire d'un carré donné se fait en construisant, sur sa diagonale, un nouveau carré : il suffit pour cela de savoir mener en un sommet une perpendiculaire à cette diagonale, puis d'y reporter la longueur de cette diagonale. Euclide donne cette solution dans le livre II des *Éléments*, et... Socrate aussi : dans le *Ménon,* il fait découvrir, par le dialogue, la solution à un jeune esclave. La règle et le compas donnent une solution **exacte** de ce problème, sans aucune approximation : bien sûr, il y a celle de notre crayon, chaque fois que nous, humains malhabiles aux engins grossiers, la reproduisons, mais s'il était d'une finesse idéale, si notre main ne tremblait pas, ne fût-ce que d'une façon imperceptible, nous aurions la solution parfaite, celle du monde des idées, du monde de Platon.
Tracer la bissectrice d'un angle se résout tout aussi aisément : deux coups de compas et un trait de règle fournissent une solution idéalement **exacte** du problème.
D'un tout autre point de vue, pratique celui-là, la droite et le cercle sont, en apparence, faciles à réaliser : il suffit au maçon d'avoir avec lui une simple corde ! Tendue par deux ouvriers, elle lui fournit la droite ; fixée à un piquet, elle lui permet de tracer un cercle. Les méthodes les plus simples sont toujours les plus durables : elle est encore en usage sur les chantiers en ce début de troisième millénaire.
Pour la suite des mathématiques, nul doute : c'est là le miracle grec ! Ce désir d'une vision idéale **associée** (et non pas opposée) à la réalisation concrète. L'artisan et le géomètre, l'astronome et le philosophe. Les pieds sur terre, et la tête dans les étoiles. Chercher l'abstraction sous le concret, concrétiser l'abstraction. Et c'est ainsi que vont naître des problèmes pour plus de vingt siècles, et que plus de vingt siècles d'une âpre lutte vont apporter des créations d'une extraordinaire fécondité :

« Ce qui a payé les efforts des Grecs, c'est la découverte de courbes comme la conchoïde, les cissoïdes, de relations entre problèmes en apparence très différents, etc... ».

Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques.*

Légendes et vrais problèmes

Le problème de Délos

C'est aux Cyclades, dans l'île de Délos que commence l'aventure sans laquelle nous n'aurions sans doute pas cette belle exposition à visiter. Nous sommes en 427 avant J.C., la guerre du Péloponnèse, qui oppose Athènes aux autres cités, fait rage. Et comme un malheur n'arrive jamais seul, la peste ravage Athènes. Le problème dépasse les humains : il faut donc s'adresser aux Dieux, et pour cela consulter l'oracle le plus réputé, celui d'Apollon à Délos. La sentence tombe : que l'on double de volume l'autel de son temple, qui est de forme cubique, et la peste cessera. Voilà donc, posé par les Dieux courroucés, le problème de la **duplication du cube**, dit encore **problème de Délos**. Et ils ne plaisantent pas : un maladroit doubla le côté... la peste continua ! Si l'emplacement exact est aujourd'hui incertain (d'autant qu'il y eut trois temples successifs au gré des agrandissements), la visite de ce magnifique sanctuaire reste recommandable, et offre une émotion supplémentaire indiscutable à l'amateur de mathématiques.

Délos : le sanctuaire d'Apollon, un « autel » quasi cubique… qui n'est sans doute pas le bon !

Les beaux problèmes ont la caractéristique d'une riche complexité sous une apparence simple. Au fond, ce n'est qu'une variation sur le thème de la duplication du carré si bien connu... Oui, mais voilà : toutes les tentatives « à la règle et au compas » échouent ! Maladresse ou impossibilité ? On ne saura que bien plus tard que c'est le deuxième cas, et qu'il est lié au degré de l'équation algébrique correspondante : 3 pour la duplication du cube, 2 pour celle du carré. Et grâce à cette incertitude, l'inventivité va pouvoir s'exercer.
Nous connaissons cette légende par une lettre d'Erathostène (276 av J.C., 194 av J.C.) au roi Ptolémée III d'Egypte. Certes, elle comporte des inexactitudes évidentes, mais nous ne la détenons que de seconde main, d'un commentateur du V$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère, Eutocius : *« Ils envoyèrent donc demander aux géomètres qui étaient près de Platon, dans l'Académie, de chercher une solution »*... Platon naît en 427, il va falloir se montrer patient avant de juguler l'épidémie ! Plus probablement, il faut l'interpréter ainsi : le problème géométrique était encore d'une grande acuité à l'Académie, et synonyme de problème difficile ; qui le résoudrait serait assez malin pour vaincre la peste.
De plus, Erathostène fait remonter la question à une date bien antérieure. Il nous parle de Glaukios, fils de Minos et de Pasiphaé, mort alors qu'il était enfant. Son père, jugeant la tombe, un cube de cent pieds de côté, trop petite, aurait exigé le doublement de son volume, en commettant – déjà ! – l'erreur des Athéniens : *« Sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté... ».* Voilà donc notre problème posé au XIII$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C. au moins, si on le rapporte aux fouilles de Cnossos, et Glaukios aussi légendaire pour les mathématiciens que sa sœur, la *Phèdre* de Racine, et son demi-frère, le Minotaure...

La trisection de l'angle

On imagine les sarcasmes de ceux qui aiment à célébrer la soi-disant défaite de Platon : voilà bien les mathématiciens (ne les gratifions surtout pas d'une majuscule !), occupés en vaines spéculations quand des problème vitaux se posent ! Or, le statut de la **trisection de l'angle** est tout différent : c'est un problème pratique de la plus grande importance pour les astronomes. Ils ont besoin de connaître certains rapports dans le triangle avec une précision maximale. À Alexandrie, Claude Ptolémée (85-165) a édifié la première « table trigonométrique » de degré en degré. Il s'appuie sur des angles connus : 60° (le triangle équilatéral est constructible), 72° (le pentagone est constructible, les *Éléments* d'Euclide y pourvoient). Il sait trouver les lignes trigonométriques d'une somme et d'une différence ; il a inventé à cette fin le théorème sur les quadrilatères inscriptibles qui porte son nom. L'angle de 12° est donc maîtrisé, deux bissections mènent à celui de 3°. Et après ?
Il n'y a plus d'après... avec la règle et le compas. Même échec, même incertitude, et, pour notre lecture moderne, même degré : 3. La preuve de l'impossibilité ne viendra qu'en 1837 sous la plume d'un élève de l'Ecole des Ponts et Chaussées, Pierre Wantzel (1814-1848). Mais, si l'on y songe, c'est une chance formidable : l'astronomie ne peut pas attendre... surtout un résultat négatif ! De nouveau, il va falloir inventer. La géométrie va s'étendre, elle va se faire algèbre, elle va se faire analyse numérique.

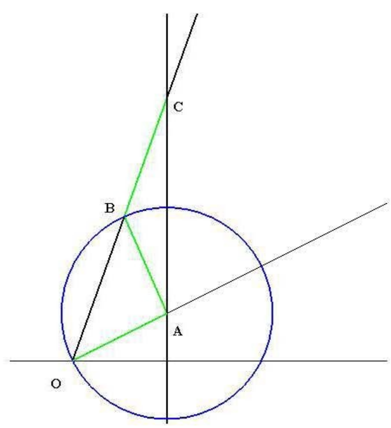
Au-delà du compas

Les coniques

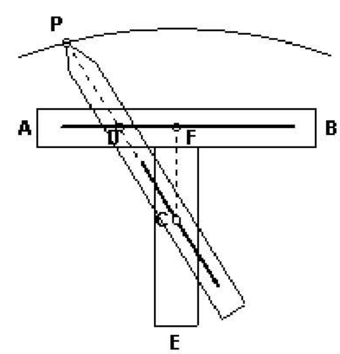
De nouvelles courbes, donc. Le problème de Délos marque ainsi l'acte de naissance des coniques, promises à un bel avenir mathématique. Ménechme (380 av J.C., 320 av J.C.) les définit, et ramène le problème de la duplication du cube à la recherche de l'intersection de deux d'entre elles. Il donne d'ailleurs deux solutions, qu'on exprimerait ainsi de nos jours : résoudre $x^3 = 2$ revient à couper la parabole $y = x^2$ et l'hyperbole $xy = 2$, ou encore les deux paraboles $y^2 = 2x$ et $x^2 = y$. (Bien sûr, les coordonnées ne seront pas disponibles avant Descartes, mais la formulation est équivalente).
C'est satisfaisant... et ça ne l'est pas ! Certes, on est capable de construire à l'aide de la règle et du compas autant de points que l'on voudra de chacune des courbes. Mais... **pas** leur point d'intersection ! Une infinité, sauf celui qui nous intéresse : *un seul être vous manque*...

Les cubiques et quartiques

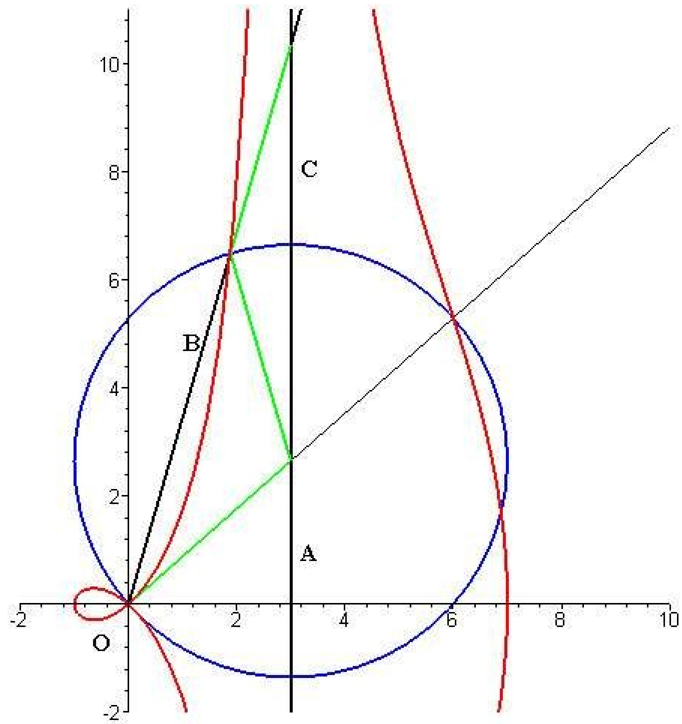
Autre chose, alors. Puisque l'on dispose d'un instrument à tracer les cercles... pourquoi ne pas trouver une nouvelle courbe et un nouvel instrument traceur associé ? Un super-compas, en quelque sorte... La réponse la plus simple, à ce point de vue, a été apportée par Nicodème (280 av J.C., 210 av J.C.). Bien qu'on n'ait pas de trace de ses écrits, et que les auteurs grecs ne nous facilitent guère la tâche en effaçant les traces de l'étape d'*Analyse* de leurs recherches pour ne laisser que la *Synthèse,* on peut penser qu'il a pris pour point de départ une figure étudiée par Archimède (287 av J.C., 212 av J.C.) liant quelques égalités de côtés dans des triangles à la présence d'un angle triple d'un autre : c'est la phase d'analyse. En produisant une courbe réalisant ces égalités, il peut s'en servir pour trisecter un angle : c'est la synthèse résolvant le problème. Or cette courbe, la *conchoïde de droite*, s'obtient facilement : on fixe un point *O* et une droite *(D)* ; lorsqu'un point *M* parcourt *(D)*, un point *P* obtenu en reportant, de part ou d'autre, sur la sécante variable *OM* une longueur fixe, décrit la *conchoïde*. Il est aisé de réaliser un appareil à coulisse matérialisant ce tracé.



l'inclinaison



l'appareil traceur



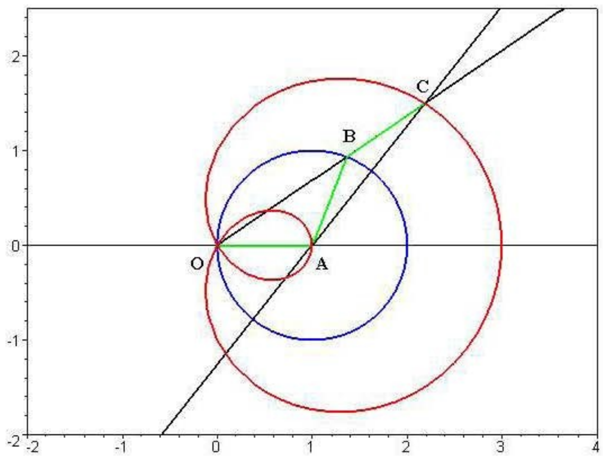
la conchoïde de Nicodème

A peu près à la même époque, Diocles (240 av J.C., 180 av J.C.) introduit pour résoudre
la duplication du cube une nouvelle courbe, la *cissoïde.* Nous la jugerions volontiers plus
simple à l'aune de nos critères : elle annule une équation de degré 3, contre 4 à la *conchoïde* de Nicodème.

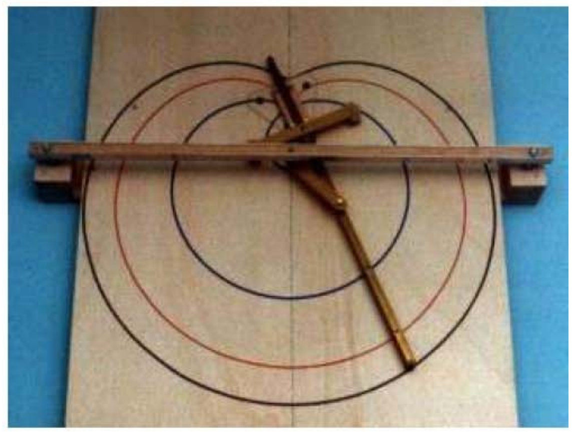
cissoïde	*conchoïde*
$(x^2 + y^2)\, x - a\, y^2 = 0$	$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2 x^2 = 0$

Mais pour nos Grecs, qui n'écrivent pas d'équation, la simplicité sera surtout celle de sa construction géométrique. De nouveau, on peut en construire autant de points que l'on voudra, en faisant varier un point sur une droite, puis en déterminant une intersection droite-cercle. Mais autant que l'on voudra... c'est une infinité **dénombrable** seulement (et dans laquelle la probabilité d'obtenir le point qui résoudrait notre problème est nulle !). Au contraire, un instrument traceur donne la **puissance du continu**, et sous cet aspect, elle ne rivalise pas avec la *conchoïde* : oui, il existe un instrument qui l'engendre, par un mouvement d'équerre, mais c'est seulement Newton qui le donnera...

Les deux problèmes ont excité l'imagination des mathématiciens de toutes les époques ; tout particulièrement la figure de l'inclinaison, qui a donné naissance à d'autres solutions par des courbes du troisième degré : *strophoïde* de Roberval (1645), *trisectrice* de Maclaurin (1742), du quatrième : *limaçon* d'Etienne Pascal — père de Blaise — (1640),... et même du sixième, avec Giovanni Ceva (1648-1734). Un mécanisme traceur du limaçon, conçu par Peaucelier en 1873, est visible dans l'exposition.



limaçon et trisection par inclinaison



appareil traceur du limaçon

D'autres Courbes encore...

Archimède possédait une solution à la trisection à l'aide de sa fameuse *Spirale*. Il pouvait même réaliser tout aussi facilement une *n*-section ; le seul ennui était l'absence de mécanisme traceur articulé : voilà une courbe simple conceptuellement... mais pas mécaniquement, en son temps ! Aujourd'hui, c'est désarmant de facilité : faire tourner un disque à vitesse constante, pendant qu'on déplace radialement un point, le long d'une tige, à vitesse uniforme. Si l'on n'avait pas su faire ça, il aurait été inutile d'inventer le CD !

Mais à l'ancienneté, le gagnant est Hippias : sa solution au problème Délien date d'environ 420 av J.C., et utilise une courbe qu'on appellera plus tard *quadratrice de* Dinostrate, en raison de l'application qu'en fit ce mathématicien au troisième grand problème de l'époque, la **quadrature du cercle**. Comme la spirale d'Archimède, elle possède deux « défauts » :

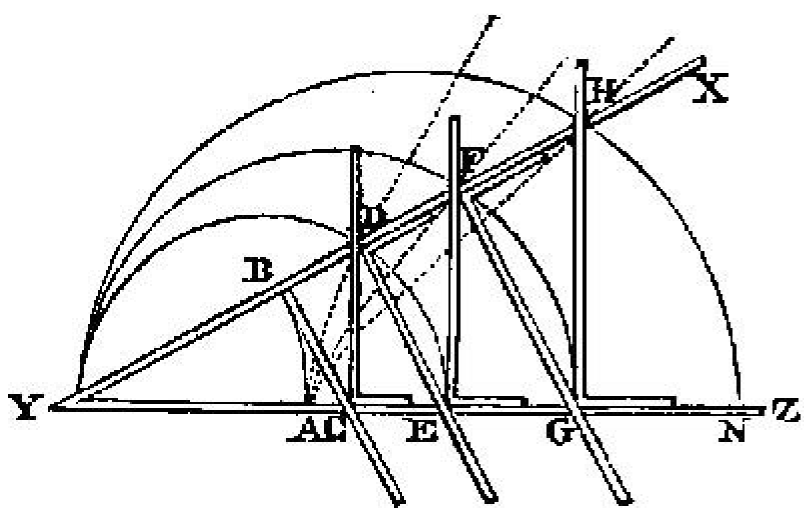
- pour nous, de **ne pas avoir d'équation polynômiale** ;
- pour les Grecs, de **n'être traçable par aucun mécanisme connu**.

C'est sans nul doute le caractère insatisfaisant de ces solutions qui fit poursuivre les recherches (vaines) à la règle et au compas, mais aussi découvrir les courbes algébriques de degré supérieur à 2, que nous avons évoquées auparavant.

Mathématiques pures ou appliquées ?

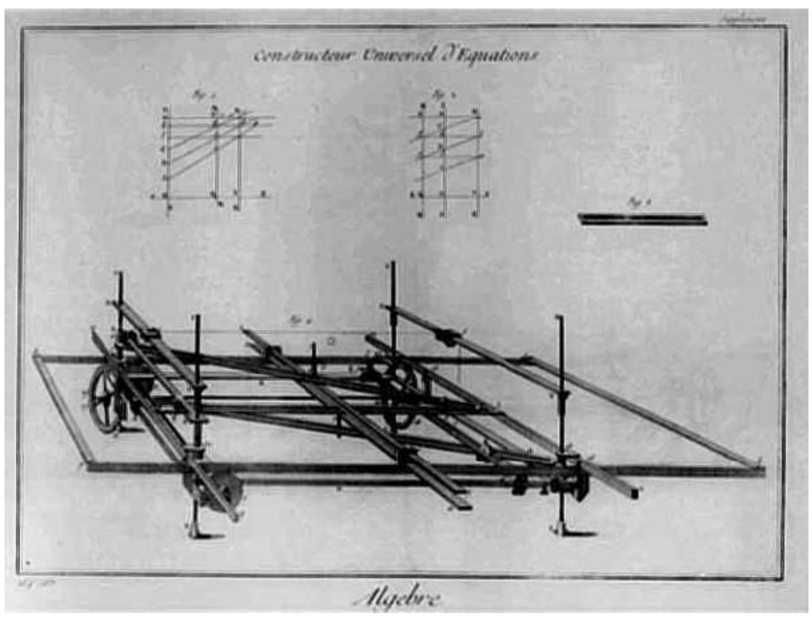
Des embiellages et des corps

Nous ne pouvons qu'être frappés par l'étrange coïncidence qui semble lier algébricité de la courbe et existence d'un mécanisme traceur pour la réussite (la *conchoïde* de Nicodème, le *limaçon* de Pascal) ou l'échec (*Spirale* d'Archimède, *Quadratrice de* Dinostrate). D'un coté, un problème de mathématiques pures, de l'autre... un problème d'ingénieur (au mieux), de « garagiste » (au pire)... Pourtant, un lien surprenant a été révélé par Alfred Kempe en 1877 : les courbes algébriques sont **exactement** celles à qui l'on peut associer un système traceur articulé !
Ce n'est là que le dénouement par une réconciliation spectaculaire (on pourrait se croire au théâtre...) des amours houleuses des mathématiques et des mécanismes. L'ambiguïté en accompagne la naissance : Platon est tout à la fois crédité de l'invention d'un mécanisme à équerres fixe et règle mobile résolvant le problème de Délos, et d'une *fatwa* condamnant sans appel de telles méthodes, accusées de *« ruiner l'excellence de la géométrie »...*
Cas suivant de schizophrénie : Monsieur Descartes ! Qui n'hésite pas à concevoir *« de nouveaux compas, que j'estime aussi justes et aussi géométriques que le compas ordinaire* avec lequel on trace des cercles » (1619, lettre à Beeckmann). Mais s'il décrit un « compas trisecteur », fait dans la géométrie le croquis d'un appareil à équerres coulissantes apte à résoudre des équations du troisième degré (il donne l'exemple explicite x3= x + 2)..., il se garde bien de les faire construire.



Descartes, la géométrie

En fait, il prône de ne pas utiliser de cubiques pour une question soluble par intersection des coniques, au nom d'une simplicité par le degré le plus bas possible ; Newton s'opposera ensuite à cette vision, revenant, pour sa part, à la commodité de tracé... et à la *conchoïde.* Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, nos problèmes sont intacts, mais les progrès de l'algèbre sont passés par là, l'air du temps aussi : l'époque des Lumières, la Révolution, rêvent d'universalité... ceux qui veulent s'attaquer aux équations aussi ! Extrapolant une méthode graphique inventée en 1761 par le Hongrois Janos Segner (1704-1777) pour résoudre une équation de degré quelconque, l'*Encyclopédie* de d'Alembert présente un ***constructeur universel d'équations*** (1784)... machine en ce temps virtuelle, mais aujourd'hui réalisée et présente dans l'exposition ! Les controverses ne sont pas éteintes : à l'École Normale de l'An III, Lagrange expose la méthode, Laplace lui accorde son dédain... Désuet, cet appareil ? Ne concluez pas trop vite : mécaniquement, il simule l'algorithme de Horner, c'est-à-dire la méthode optimale d'évaluation d'un polynôme, ... un classique de l'informatique.

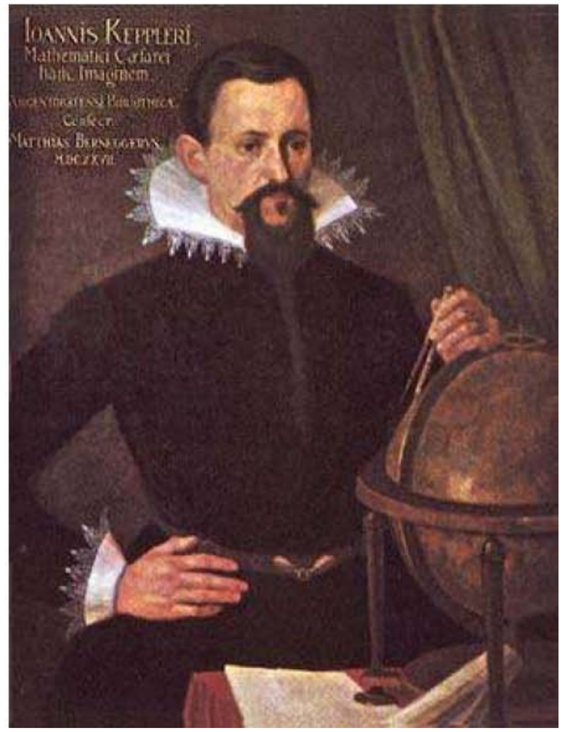


Allers-retours disciplinaires

Un des immenses progrès des mathématiques est l'invention de l'algèbre par Al-Khowarizmi (780-850) : nouvelle formulation des questions, justification par des constructions, l'algèbre vient de la géométrie. Mais lorsqu'il s'agit de résoudre les équations du troisième degré, c'est un retour vers la géométrie et les courbes qu'opère Omar Alkhayyam (1048-1131). Son programme est ambitieux : faire pour le troisième degré ce qu'a fait Al-Khowarizmi pour le second. Mais il doit affronter 27 cas, pour tenir compte de toutes les variantes de signe, contre 6 seulement à son prédécesseur ! *Il n'est de science que du général :* très méthodiquement, il reprend et étend la méthode de Ménechme et, pour chaque cas, construit une intersection de coniques appropriée, 500 ans avant Descartes ! Qui renverra l'ascenseur, si l'on ose dire, en mettant pour sa part l'algèbre au service de la géométrie des courbes : sans coordonnées, sans équations, pas d'étude des courbes algébriques de degré supérieur.
L'article de Wantzel, en 1837, ramène définitivement les questions de constructibilité dans l'orbite de l'algèbre. Galois est mort en 1832, incompris : c'est dire que si la démonstration de Wantzel est exprimée en termes d'équations, elle mettra bien longtemps avant de recevoir sa formulation moderne de théorie des corps. De fait, les célèbres ouvrages de Klein (1895) et Lebesgue (1941) n'en parlent qu'à ceux qui savent lire entre les lignes. S'il clôt par une réponse négative deux des problèmes mythiques, il laisse ouvert, pour peu de temps désormais, celui de la quadrature du cercle. Trois coups de boutoirs : Liouville (1844), Hermite (1873), Lindemann (1882) amèneront la réponse négative - et attendue -, mais surtout, marqueront l'essor de la théorie des nombres transcendants... c'est là une autre histoire.

Les nouvelles courbes sollicitent aussi largement l'analyse. Tant que les courbes sont « rares », les problèmes de tangentes et d'aires peuvent se résoudre au cas par cas grâce à des trésors d'ingéniosité géométrique... D'Archimède à Pascal et Fermat, les pionniers n'en ont pas manqué, mais devant la prolifération, forger un nouvel outil sera la seule solution viable : ainsi naîtra le *calcul infinitésimal*. Mais ce qui est plus intéressant encore, c'est que le problème de la trisection va enfanter, dans un contexte de mathématiques appliquées (la résolution numérique d'une équation de degré 3), l'une des idées les plus fécondes de l'analyse fonctionnelle : la **méthode des approximations successives**, que le XX$^{\text{ème}}$ siècle va porter de l'existence des solutions d'équations différentielles (Picard 1890) aux confins des espaces de Banach !
Celui par qui tout arrive, c'est un maniaque des calculs de précision : Al-Kashi (1380-1429), le mathématicien de Samarcande. De sin (3°), valeur connue exactement par radicaux depuis Ptolémée, il déduit sin (1°) à 9 décimales exactes. Jamais les tables trigonométriques n'auront été aussi précises ! Et ce n'est pas un luxe, mais une nécessité, couplée à la construction du quadrant d'observation à l'œil nu le plus grand jamais réalisé, à l'Observatoire de sa ville, à l'instigation du prince-astronome, Ulugh Beg... C'est un autre obsédé de la précision qui redécouvrira cette méthode, quelque 200 ans plus tard : un certain Johannes Kepler, au corps à corps avec Mars.

Al-Kashi



Kepler

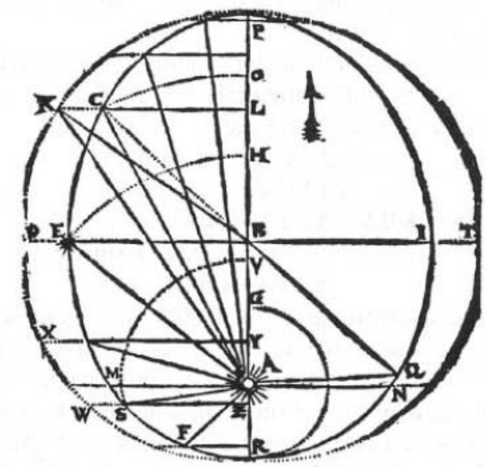
Le temps fait (parfois) à l'affaire…

Il faut souvent se montrer malin quand on est chercheur... et qu'on cherche, entre autres, quelques subsides pour ses travaux. La lettre d'Érathostène évoquée précédemment se conclut par une manœuvre agitant fort habilement la sébille : son invention d'un procédé mécanique pour la résolution du problème de Délos serait *« utile aussi à ceux qui veulent augmenter la dimension des catapultes et balistes ».* Des mathématiques pures... qui s'appliquent, ou dont on peut faire miroiter l'application, c'est nettement plus convaincant ! Voici un modèle de demande de subvention pour quelques siècles à venir...

Il faut souvent se montrer patient quant à l'effectivité des mathématiques. Les politiques pressés qui mesurent triomphes ou défaites de la recherche en contrats avec les entreprises ou en nombre de brevets pourraient trouver matière à méditer dans une telle exposition. Encore faudrait-il qu'ils le veuillent... C'est que les échéances électorales ne se mesurent pas en siècles. Et l'on frémit à l'idée que chacun des héros de cette histoire ait pu breveter « sa » courbe…
Quand Apollonius (262 av J.C., 190 av J.C.) compose son chef d'œuvre, *Traité des coniques*, elles ne sont guère qu'un objet de mathématiques pures. Qui peut se douter, en ce temps où l'on croit au mouvement circulaire des planètes, au nom de la perfection du cercle, qu'en 1609, après dix ans de lutte acharnée contre l'orbite de Mars, Kepler en fera la courbe vedette de l'astronomie ? Et ce, à son corps défendant...

Seules, son honnêteté d'expérimentateur méticuleux et son obstination vont l'amener là où il n'avait nulle envie d'aller.

APOLLONII
PERGAEI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR
SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
M D LXVI.

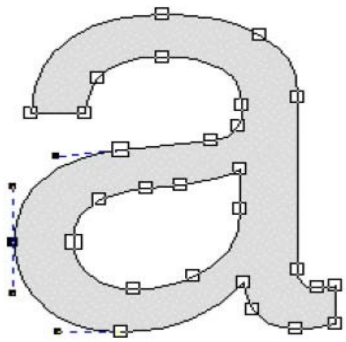


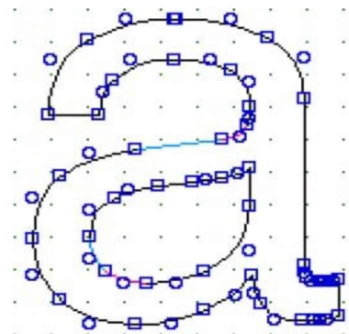
L'Eglise, si réticente sur la théorie copernicienne, saura profiter des propriétés focales de l'ellipse, telles qu'on les verra présentées, pour... sacrifier au devoir de confesser les lépreux, sans trop de risque quand-même : la voûte elliptique de la Salle de l'Echo (XVII^ème^ siècle), à l'Abbaye de La Chaise-Dieu (XIV^ème^ siècle, Haute-Loire) apporte une réponse géométriquement (du moins !) élégante. Qui peut se douter enfin qu'au tournant du troisième millénaire, les antennes paraboliques, d'abord symboles de la « Big Science » à l'écoute fébrile du fond de l'univers, deviendront un banal objet de consommation courante ? On crédite avec raison Archimède de l'idée ; quant à sa réalisation effective pour brûler la flotte romaine, on en discute encore aujourd'hui, mais le scepticisme semble l'emporter quant à l'efficacité.

L'Au-delà, c'est encore aujourd'hui !

On pourrait, au terme de ce parcours, penser qu'on a effectué, avec le respect qui lui est dû, la visite d'un beau monument... que plus personne n'habite. Il n'en est rien ! Restreignons-nous aux seules courbes du troisième degré, pour donner deux témoignages de leur actualité. Pour corroborer notre propos, l'un viendra... une nouvelle fois des applications mécaniques, l'autre des mathématiques les plus pures qui soient : la théorie des nombres.

À partir de 1945, l'ingénieur Pierre Bezier a développé, pour le compte de Renault, les célèbres courbes qui portent son nom. Il s'agissait, à l'origine, de modèles de la CAO, dont le cahier des charges exigeait un stockage peu volumineux, un changement d'échelle rapide (des plans aux maquettes, puis aux machine à commande numérique), une certaine régularité (la classe C^2, dans le jargon mathématique, est indispensable pour ne pas casser un outil de coupe). Ce qui l'amena à un système de cubiques raccordées... que l'informatique a universellement adopté depuis les années 1980 : ce sont les polices *Postscript* dont il serait impensable de se passer aujourd'hui ! Un seul caractère est ainsi fait de plusieurs cubiques... Pensez à un texte complet, à tout ce qui s'écrit, et force vous sera de convenir que les cubiques ont envahi notre vie quotidienne. Mais, ô surprise... les coniques résistent, sous la forme des polices *TrueType*, qui sont constituées d'arcs de Bézier de degré 2... soit des paraboles, mais dans un mode de représentation commode. Une synthèse s'imposait : elle est réalisée dans la norme *OpenType*... qui elle aussi, fait appel aux courbes de Bézier !





Pierre Bézier Postscript : degré 3 Quadratique : degré 2

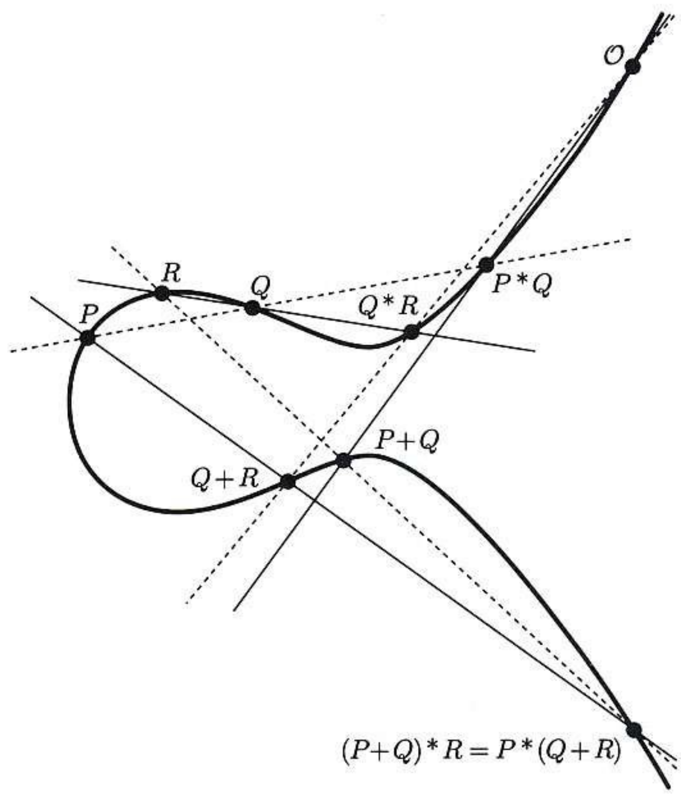
Notre deuxième exemple passa longtemps pour le chant du cygne des courbes de degré 3. Gabriel Lamé (1795-1870) avait découvert un étonnant théorème d'alignement sur les cubiques, interprété en 1901 par Henri Poincaré (1854-1912) comme exprimant l'associativité d'une loi de groupes sur la courbe : chassez l'algèbre de la géométrie, elle revient au galop... mais dans les années 1970-1980, trouver cela intéressant, ou même seulement joli, vous attirait à coup sûr les sarcasmes compassés de vos compagnons d'étude : il était bien clair que l'avenir de la recherche ne pouvait se trouver dans la géométrie poussiéreuse de grand'père. Et puis, trois résultats tombèrent :

1/ 1985 : méthode de **factorisation des grands entiers** de H. Lenstra, la plus performante à ce jour ! (c'est un challenge informatique permanent) ;

2/ 1995 : **indépendance algébrique de π et de $e\pi$** (Y. Nesterenko, P. Philippon) : il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers tel que $P[\pi, e\pi] = 0$.

3/ 1993-1994 : Andrew Wiles vient à bout du **grand théorème de Fermat** : il n'y a pas de solutions entières non triviales à l'équation $a^n + b^n = c^n$

Vous l'avez sûrement deviné... le point commun de ces trois remarquables avancées, c'est l'utilisation de cette fameuse loi de groupes !



loi de groupes sur une cubique

L'encre des chercheurs est à peine sèche, mais nous savons que le mot fin n'est ici que provisoire. Ainsi sont faits les beaux problèmes : simples dans leur formulation initiale (compréhensibles par tous), féconds et exigeants dans leurs développements (il va falloir **étudier**, **travailler**, échouer souvent, recommencer encore), imprévus dans leurs rebondissements... Pour notre plaisir, et surtout, selon la formule empruntée par Jean Dieudonné à Gustav Jacobi pour titre d'un de ses livres, *Pour l'honneur de l'esprit humain*...

Références

Bibliographie

[1] J. Aymes, *Ces problèmes qui font les mathématiques : la trisection de l'angle* (Brochure APMEP n°70)
[2] F. Conti, E. Giusti, *Au-delà du compas : la géométrie des courbes* (Diagonale)
[3] F. Gomes-Teixeira, *Traité des courbes spéciales et remarquables, T.3* (J. Gabay)
[4] R. Hartshorme, *Geometry : Euclid and Beyond* (Springer-Verlag)
[5] Y. Hellegouarch, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles* (Dunod)
[6] E. Hébert & alias, *Instruments scientifiques à travers l'histoire* (Ellipses)
[7] F. Klein, *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire* (Diderot)
[8] A. Knapp, *Elliptic curves* (Princeton University Press)
[9] W.R. Knorr, *The ancient tradition of geometric problems* (Dover)
[10] H. Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques* (J. Gabay)
[11] N. Mahammed, *Sur la résolution des équations algébriques* (Diderot)
[12] J.H. Silverman, J. Tate, *Rational points on elliptic curves* (Springer-Verlag)

Sur la toile

[13] Site du *Giardino de Archimede :* Exposition *Oltre il Compasso*
http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/curve/geocurve.php
[14] Site du *musée de Modène* : *Exposition Theatrum mechanicum, strumenti per la geometria*
http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00the.htm
[15] *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables*, par Robert Ferreol :
http://www.mathcurve.com/index.htm
[16] *Chronomath*, par Serge Mehl : http://www.chronomath.com/
[17] *Ancient greek mathematics*, à l'Université de St Andrews (Scotland) :
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Indexes/Greeks.html
[18] *La géométrie de Descartes,* par Patrice Debart
http://perso.wanadoo.fr/debart/geometrie/geom_descartes.html
[19] *La duplication du cube,* Site de l'IUFM de la Réunion :
http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/telecharger/duplicubCabri11/TEXTEduplicub10.htm
[20] Site du Mathouriste :
http://home.nordnet.fr/~ajuhel/