Fourier avant Fourier...

Les Astronomes en Avance sur leur Temps

Il est de tradition de commencer une histoire des séries trigonométriques par le mémoire sur les cordes vibrantes (1753) de Daniel Bernoulli (1700-1782). Mais il est possible de remonter plus tôt pour en trouver la trace, d'abord sous forme géométrique, puis analytique: il est remarquable que ce mérite revienne aux astronomes. Confrontés à une modélisation extrêmement difficile -le sujet n'est pas clos de nos jours, où la théorie du chaos et l'usage des ordinateurs les plus puissants ont pris le relais des Kepler, Newton, Laplace et Poincaré- ils ont construit les prémisses d'approximations trigonométriques efficaces.

1 Le Temps de la Géométrie: des Épicycles et des Hommes

1.1 Un berceau Grec

Le célèbre traité du grec Claude Ptolémée (circa 90-circa 168), l'*Almageste*, composé à Alexandrie vers 150, est le phare de l'astronomie théorique entre Antiquité et Renaissance. D'une grande rigueur mathématique, il repose sur des postulats, dont les trois principaux, pour ce qui nous concerne ici, sont l'immobilité de la Terre au centre du monde, la primauté du cercle (et de la sphère) pour la perfection de leur forme, celle des mouvements uniformes pour les décrire.

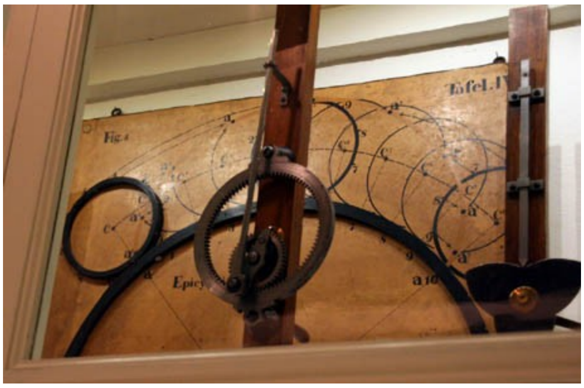


Illustration 1: Gabinetto de Fisica, Florence

Malheureusement, les observations s'accommodaient bien mal de ces vertueux principes: les planètes semblaient tantôt accélérer, tantôt freiner, ou, pire, s'arrêter et “rétrograder”, c'est à dire repartir en sens inverse, référence prise aux étoiles fixes de la voûte céleste. Ces caprices apparents leur avaient valu le nom, mêlant poésie et perplexité scientifique, d'*astres errants*. *Sauver les phénomènes*: expliquer (et pouvoir prédire) ces mouvements, sans pour autant en rechercher les causes mécaniques, tel était alors le but de la science astronomique.

Ptolémée avait eu recours, entre autres, à un procédé attribué à Apollonius de Pergé (262 av. J.-C. - 190 av. J.-C.), le système épicycle-déférent: la planète décrit (uniformément) un cercle dont le centre se meut lui-même (uniformément) sur un autre cercle. Ce deuxième cercle reçoit le nom de ***déférent;*** le premier, parce qu'il tourne **autour** du second, est nommé ***épicycle*** (épi = “autour de”): on reconnait le principe du célèbre jouet *Spirograph®*, présenté pour la première fois au salon du jouet de Nüremberg en.. 1965!

C'était plutôt bien imaginé, quoique Ptolémée ne pouvait connaître la raison de son succès. Supposons un instant que la Terre et Mars décrivent des orbites circulaires autour du Soleil: leurs faibles excentricités, en tant qu'ellipses, légitiment cette hypothèse simplificatrice. Le mouvement de Mars, vu depuis la terre, est un cercle autour du soleil (mouvement réel), lequel **paraît** décrire un cercle autour de la terre (mouvement **apparent** du soleil): la trajectoire apparente de Mars, pour l'observateur terrestre, est bien un épicycle, et voilà ses rétrogradations possibles! L'utilité des épicycles ne se limitait pas à cela, et permettait des “retouches” pour mieux ajuster la théorie aux observations.

1.2 Perfectionnement en Terre d'Islam

Il faut savoir gré de deux choses aux savants des pays d'Islam: avoir conservé l'héritage scientifique grec (par contraste avec un Occident Romain et catholique au mieux indifférent -l' *Almageste* y fut perdu pour dix siècles, au pire hostile aux avancées lorsqu'elles se firent jour avec Copernic et Galilée), et l'avoir fait fructifier. Certes, ils ne remirent jamais en question le modèle géocentrique de Ptolémée, mais ils n'en firent pas non plus un dogme immuable. Sitôt achevée la phase, humble mais minutieuse, de traduction (et c'est ainsi que la *Syntaxe Mathématique* de Ptolémée fut arabisée en *Almageste* -”le très grand”), ils se livrèrent à une critique de l'ouvrage, en relevèrent les contradictions, internes ou avec la Physique d'Aristote, et s'efforcèrent de proposer des solutions. Ibn-al-Haytham (965-1040, plus connu sous le nom d'Alhazen) fut probablement le premier à avoir l'audace de rejeter le modèle de Ptolémée: il n'avait, selon lui, aucune réalité physique, alors même que l'objet de l'astronomie devait être de connaître ***ce qui se passe*** dans les cieux.

De la pléiade de savants (et, donc, de variantes réformées du modèle ptoléméen) émerge l'exceptionnelle figure d'Al-Tusi (1201-1274). Il passa la première partie de sa vie dans la célèbre forteresse d'Alamut, partageant la foi des *Ismaéliens Nizarites* (caricaturés en Occident comme *Secte des Assassins*). Lorsque celle-ci dut se rendre, en 1253, à Hulagu Khan (petit-fils de Gengis Kahn), Al-Tusi sut convaincre son nouveau maître de lui construire le plus grand observatoire jamais vu jusqu'alors, et d'y engager une équipe d'astronomes qu'il dirigerait: ainsi naquit la prestigieuse *École de Maragheh*.

Illustration 2: le roc d'Alamut et la forteresse

Illustration 3: l'observatoire de Maragheh, les restes du grand quadrant et de l'enceinte

Parmi les causes de souci des théoriciens de mécanique céleste, la Lune occupe une place de choix, jamais démentie au cours des siècles. Les raisons profondes, pour qui regarde l'histoire une fois le chemin parcouru, tiennent à deux facteurs: il est impossible de négliger l'attraction que le Soleil, en raison de sa masse, exerce sur elle à côté de celle, principale, de la Terre; et malheureusement, aucune formule analytique ne peut être donnée pour sa trajectoire. Ptolémée avait, pour la décrire, violé ses propres principes: le déférent tournait uniformément autour d'un point ***autre*** que son centre, dans une sorte de mouvement de vilebrequin.

Al-Tusi corrigea le problème en faisant “vibrer” le centre de l'épicycle lunaire sur un segment centré sur le déférent, à l'aide de deux cercles supplémentaires. C'est le fameux *couple d'Al-Tusi*: un mouvement sur une droite est engendré par deux mouvements circulaires uniformes. Le centre de l'épicycle lunaire décrit alors lui -même, non un cercle, mais déja une courbe cycloïdale, et Al-Tusi le souligne très nettement dans son texte. Il en étendit aussi l'usage aux autres orbites.

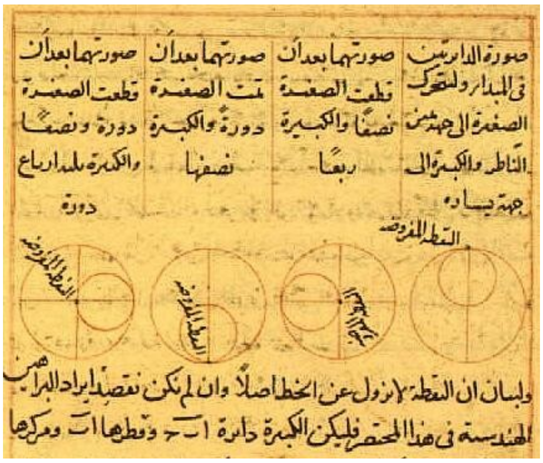


Illustration 4: couple d'Al-Tusi (Bibliothèque du Vatican)

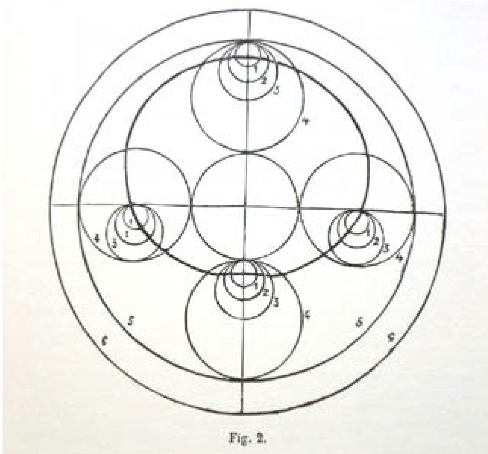


Illustration 5: trajectoire du centre de l'épicycle lunaire. Correction par Carra de Vaux d'un manuscrit arabe, in *Tannery,* Histoire de l'Astronomie Ancienne

1.3 Copernic, une Révolution sans Table Rase

Une lecture, sinon hâtive, du moins incomplète du *De Revolutionibus* de Copernic laisserait croire qu'en replaçant le Soleil au centre du monde, le chanoine polonais avait rendu caducs les épicycles. Or la célèbre figure du Livre I ***n'est qu'un schéma de principe*** de la distribution des orbes célestes.

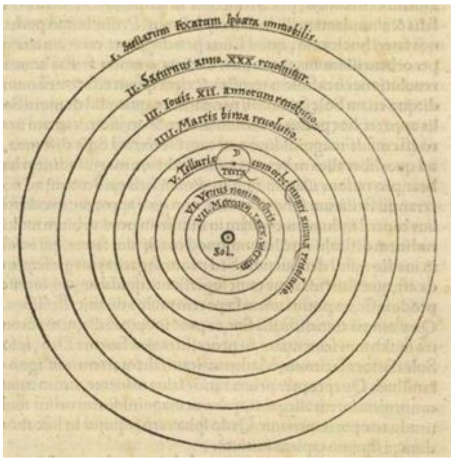


Illustration 6: De Revolutionibus, Livre I

Illustration 7: statue de Copernic à Torún (Pologne), sa ville natale

Et non seulement les épicycles ne sont pas rejetés, mais ils sont utilisés d'une manière beaucoup plus systématique: ainsi toutes les planètes “supérieures” (au delà de la Terre) sont régies par le même modèle, avec un seul épicycle. La lune, en revanche, exige pour une meilleure approximation de greffer un deuxième épicycle sur le premier. Paradoxalement, ce souci de précision de l'auteur fut perçu comme une faiblesse et retourné contre lui par ses opposants les plus farouches: à quoi bon bouleverser l'ordre des cieux, qui plus est au mépris des Saintes Écritures, si c'est pour avoir un système aussi compliqué (en nombre de cercles) que celui de Ptolémée?

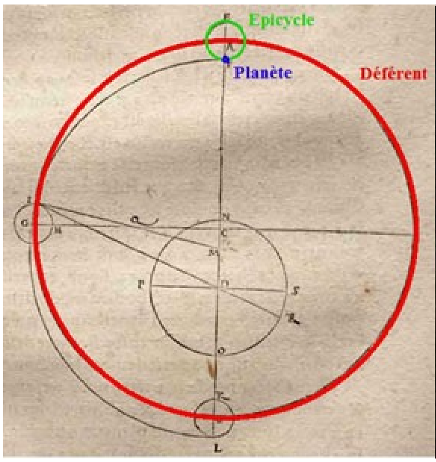


Illustration 8: modèle pour une planète supérieure (Saturne)

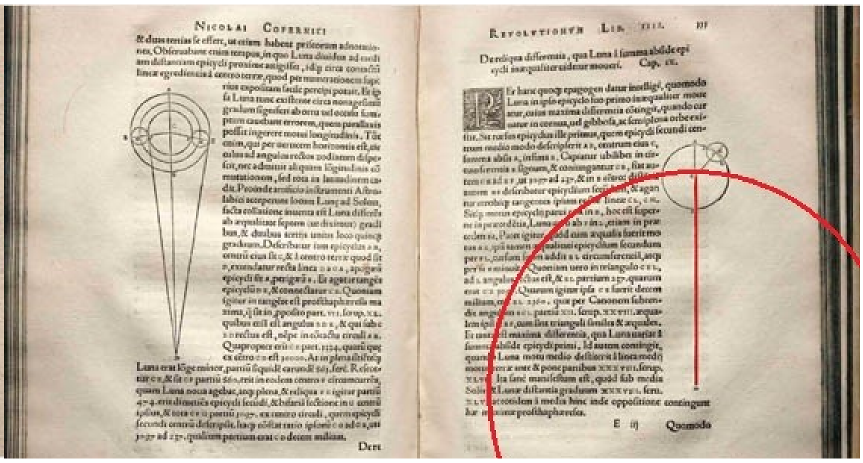


Illustration 9: double épicycle lunaire. Rajouté, en rouge: l'orbite terrestre comme déférent.

Le cas de Mercure était mis à part: la planète n'est pas fixe sur son épicycle, mais soumise à des oscillations le long de son rayon, décrivant un petit segment centré sur l'épicycle. Et lorsqu'on regarde comment Copernic produisait ce mouvement rectiligne... on découvre qu'il employait un couple d'Al-Tusi! Il ne semble pas que les travaux du maître de Maragheh soient parvenus jusqu'à lui; le plus vraisemblable à ce jour est qu'il ait reconstruit, indépendamment, le même mécanisme.

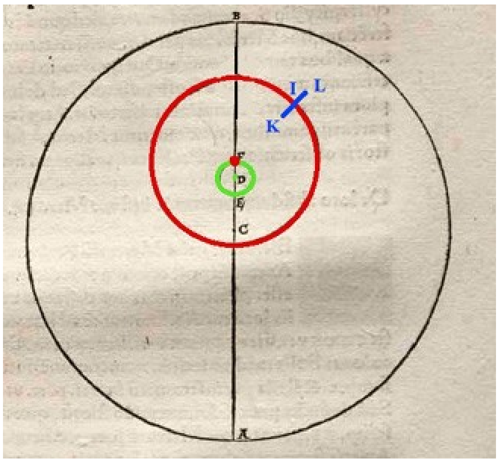


Illustration 10: modèle pour le mouvement de Mercure

Illustration 11: le couple d'Al-Tusi dans le De Revolutionibus

1.4 Les Excellentes Raisons d'un Miracle

1.4.1 Fourier en *Deus ex Machina*

Chaque planète suit une trajectoire qui a deux qualités essentielles: elle est ***périodique*** et ***régulière*** (elle possède en tout point une tangente, et celle-ci varie continûment avec le temps). Elle vérifie donc les conditions énoncées par Dirichlet en 1829 pour garantir son développement en série de Fourier (et même plus: avec une excellente qualité de convergence, la convergence uniforme). Une somme partielle de Fourier $\sum_{-N}^{N} c_n \exp(ni\omega t)$ en constitue donc une approximation d'autant meilleure que N est grand; or une telle somme s'interprète comme une superposition de mouvements circulaires. Si N =1 ne suffit pas, on tentera sa chance avec N=2, et c'est ce que fait Copernic pour la Lune! La régularité de la trajectoire garantit une convergence rapide de la série, ce qui explique qu'il n'y ait pas, en pratique, besoin d'aller trop loin...

Pour le dire d'une autre manière, ce théorème affirme que l'on pourra toujours, si compliquée que soit une trajectoire fermée, trouver une combinaison d'épicycles la représenter à une précision choisie au départ. Par exemple, personne ne doutera qu'un circuit de Formule 1 puisse être parcouru de façon périodique, pourvu qu'à chaque tour la voiture ait en chaque point les mêmes vitesses et accélérations qu'au tour précédent.

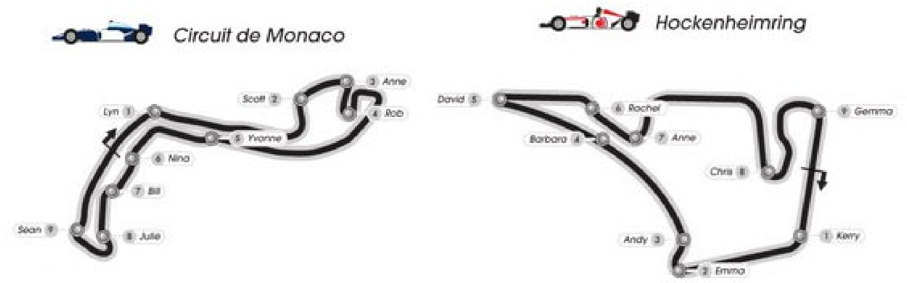


Illustration 12: deux circuits bien différents... mais approchables, chacun à leur manière, par une combinaison d'épicycles!

Si différentes soient leurs formes, chacun pourra être approché par une combinaison d'épicycles, à charge de bien en ajuster le nombre et les rayons. Ainsi Apollonius, Ptolémée, Al-Tusi et Copernic ont-ils été "fouriéristes" sans le savoir!

Fourier, si mathématicien quand il le faut, ne doutait pas, en bon physicien, que toute fonction que *l'étude de la nature* lui fournirait serait développée par sa série; il n'avait donc pas éprouvé le besoin de le prouver. Il est intéressant de trouver ce même credo chez Copernic:

*"Il faut néanmoins reconnaître que leurs mouvements sont **circulaires ou composés de plusieurs cercles** parce qu'ils exécutent ces inégalités conformément à une loi certaine et **se reproduisent périodiquement**..."*

1.4.2 Un exemple simple de calcul effectif

Ne nous contentons pas de dire: "On peut le faire!", montrons maintenant l'efficacité du procédé sur l'ellipse keplérienne, trajectoire de chacune des planètes si on la considère comme formant un système isolé avec le soleil. Il s'agit de développer l'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{1-\varepsilon.cos\,\theta}$$

où ε désigne l'excentricité de l'ellipse. C'est facile en le rapprochant du développement bien connu, dit du noyau de Poisson

$$\frac{1-r^2}{1-2\mathrm{r}\,cos\theta+r^2} = 1+\sum_1^{\infty} 2\mathrm{r}^n \cos n\theta$$

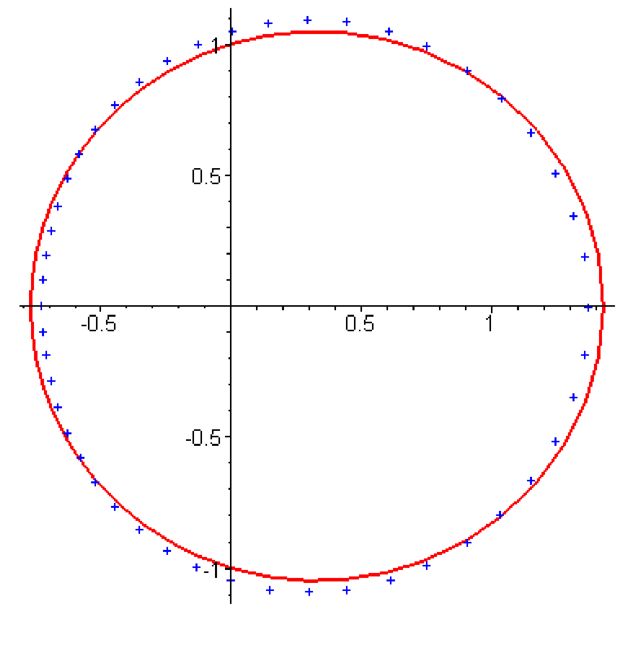
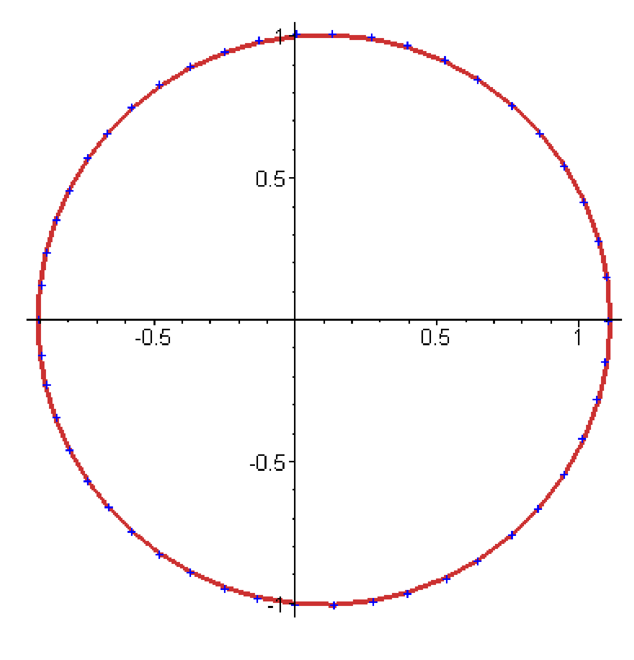
Il suffit pour cela d'ajuster judicieusement le paramètre r pour que $\varepsilon = \frac{2r}{1+r^2}$, ce qui revient à résoudre une équation du second degré. On en tire alors le développement de $z = \rho\, e^{\mathrm{i}\theta}$

$$z = \frac{1-r^2}{1+r^2}.\left[1+r\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+\ldots\right].e^{i\theta}$$

$$z = \frac{1-r^2}{1+r^2}.\left[r + e^{i\theta} + r\,e^{2\mathrm{i}\theta}+\ldots\right]$$

où l'on a négligé les termes en r^2 (et a fortiori les puissances d'ordre plus élevé) dans le crochet, car il s'avère que r est petit avec ε; la formule qui les lie montre d'ailleurs que ε est voisin de $2r$. L'excentricité de la Terre est d'environ 1/50, le r correspondant vaut donc environ 1/100, et r^2 1/100000, ce qui donne une idée de l'erreur commise.

On a tracé, à titre d'exemple, l'orbite elliptique (en rouge) et les points d'une approximation à un épicycle: l'écart n'est pas visible pour une excentricité de 0,1, ce qui correspond à celle de Mars, la plus importante des planètes extérieures! Il est bien net lorsqu'elle vaut 0,3, mais cette valeur, choisie à fin de mettre en évidence l'écart entre trajectoire réelle et approchée n'est celui d'aucune planète. Il est intéressant d'observer qu'il commence à être ressenti pour ε = 0,2, soit à peu près l'excentricité de Mercure, dont on comprend mieux alors qu'elle ait été l'objet d'un traitement particulier de la part de Copernic.

	
ε = 0,3	ε = 0,1

2 Le Temps de l'Analyse: Clairaut et la Lune

Alexis Clairaut (1713-1765) *"est le premier qui ait donné une théorie du mouvement de la Lune,* ***fondée sur l'intégration, par des séries, des équations différentielles*** *du problème des trois corps, qu'il avait obtenu en même temps qu'Euler et d'Alembert.",* nous dit Poisson. Elle fut publiée en 1745. Une fois de plus, la Lune se distingue par l'impossibilité de négliger l'attraction solaire à côté de celle, prépondérante, de la terre, d'où la dénomination: *problème des trois corps.*

Former les équations différentielles résultant de la loi d'attraction universelle de Newton est facile, après quoi Clairaut confesse son impuissance à trouver des formules explicites: *"Intègre maintenant qui pourra."*, dit-il, et il se détourne d'une recherche dont Poincaré montrera qu'elle est vaine.

L'idée féconde est alors de traiter l'action du soleil comme une **force perturbatrice**. Dans un problème à deux corps, un petit miracle mathématique rend les calculs très simples, à la portée d'un étudiant de première année: parce que l'attraction newtonnienne opère en 1/ r^2, le changement de fonction inconnue $U = K/r$ (la constante K étant correctement choisie) ramène la recherche de la trajectoire à l'équation différentielle

$$U''(\theta) + U(\theta) = 1$$

qui s'intègre immédiatement en $U(\theta) = K/r(\theta) = 1 + A\cos\theta + B\sin\theta$; on reconnait alors l'équation polaire d'une conique.

L'action du soleil ne fait que rajouter un terme au second membre. Ce terme est compliqué -il contient d'ailleurs U, et l'équation cesse d'être à la fois linéaire et sympathique. Clairaut fait mine de l'ignorer, résume la chose en écrivant la forme

$$U''(\theta) + U(\theta) = 1 + \Omega(\theta)$$

et déclare que ***si Ω peut être développée en une somme de termes***

$$\Omega = \sum Aj \cos j\theta$$

alors la solution s'écrira, par superposition de solutions élémentaires

$$U(\theta) = \sum Aj\,(1 - j^2)\cos j\theta$$

Comme les astronomes pensent séries en théorie, mais calculent avec quelques termes seulement en pratique, la question de la convergence n'est pas posée. Là encore, on peut considérer que la perturbation sera périodique et très régulière, en sorte que les justifications manquantes pourraient être apportées facilement.

3 Conclusion

Ici finit la préhistoire des séries de Fourier, ici s'ouvre le chapitre des équations aux dérivées partielles: face à la difficulté d'une intégration explicite, il faudra ruser, et c'est là que les séries révèleront leur puissance, en permettant, par le jeu de la séparation des variables, de construire des solutions non triviales par superposition de solutions élémentaires, obtenues, quant à elles, par intégration d'équations différentielles à coefficients constants.

Laplace (potentiel)	$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Cordes vibrantes (propagation des ondes)	$\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Chaleur (diffusion)	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Les "grandes équations" des débuts de la Physique Mathématique

Ironie de la chronologie, des trois grandes équations aux dérivées partielles étudiées en ces débuts, l'équation de la chaleur sera traitée... en dernier, puisque le travail commence, on l'a dit en introduction, avec Daniel Bernoulli pour les ondes, et se poursuit, avec Fourier certes, mais sur une équation de Laplace à deux variables, car Fourier commence par étudier une répartition de chaleur stationnaire, i.e. indépendante du temps. Et s'il ne traite plus ensuite que de la chaleur, avec succès, en variant les géométries du domaine, deux siècles se chargeront, avec la découverte de l'électromagnétisme et l'explosion des télécommunications, de révéler la fécondité et l'universalité de l'analyse de Fourier. Qui n'oublie pas de revenir à l'étude de l'univers par laquelle elle a commencé, avec une utilisation intensive en astrophysique et, pour ne citer qu'une application récente, la méthode de Labeyrie (circa 1970) qui détermine le diamètre des étoiles lointaines en exploitant la transformation de Fourier.